

実数  $x$  を超えない最大の整数を  $[x]$  で表す。  $n$  を自然数とする。

(1) 不等式  $[x] + \frac{k}{n} \leq x < [x] + \frac{k+1}{n}$  を満たす整数  $k$  を  $n, x$  および記号  $[x]$  を用いて表せ。

(2) 等式

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = n[x] + k$$

を示せ。さらに、この等式は

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

と表されることを示せ。