(1) $[x]+\dfrac{k}{n} \leqq x < [x]+\dfrac{k+1}{n}$ を変形して，$k \leqq n\,(x-[x]) < k+1$

よって，$n\,(x-[x])$ の整数部分は k に等しい。

つまり，$k=[n\,(x-[x])]$

(2) 証明する等式の左辺は

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(x+\frac{\ell}{n}\right)$$

と表される。

$k=[n\,(x-[x])]$ とおくと，k は整数であり，$0 \leqq x-[x] < 1$ から，$0 \leqq k \leqq n-1$

(1) より

$$[x]+\frac{k}{n} \leqq x < [x]+\frac{k+1}{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

ℓ を $0 \leqq \ell \leqq n-1$ を満たす整数として，①の両辺に $\dfrac{\ell}{n}$ を加えて

$$[x]+\frac{k+\ell}{n} \leqq x+\frac{\ell}{n} < [x]+\frac{k+\ell+1}{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

(i) $0 \leqq \dfrac{k+\ell}{n} < 1$ のとき $[x] \leqq [x]+\dfrac{k+\ell}{n}$

これと②の左半分から，

$$[x] \leqq x+\frac{\ell}{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ③$$

また，$k+\ell<n$ であるから，$x+\ell+1<n+1$

つまり，$k+\ell+1 \leqq n$ が成り立つから $\dfrac{k+\ell+1}{n} \leqq 1$

したがって，$[x]+\dfrac{k+\ell+1}{n} \leqq [x]+1$

これと②の右半分から，

$$[x]+\frac{\ell}{n} \leqq [x]+1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ④$$

③④から，$[x] \leqq x+\dfrac{\ell}{n} < [x]+1$

よって，$x+\dfrac{\ell}{n}$ の整数部分は $[x]$ に等しい。

$\therefore \left[x+\dfrac{\ell}{n}\right]=[x]$

(ii) $\dfrac{k+\ell}{n} \geqq 1$ のとき $[x]+1 \leqq [x]+\dfrac{k+\ell}{n}$

これと②の左半分から，

$$[x]+1 \leqq x+\frac{\ell}{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑤$$

次に，$0 \leqq k \leqq n-1$，$0 \leqq \ell \leqq n-1$ であり，$\dfrac{k+\ell}{n} \geqq 1$ より，$1 \leqq k+\ell$ であるから，

$n+1 \leqq k+\ell+1 \leqq 2n-1$ が成り立って $1+\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{k+\ell+1}{n} \leqq 2-\dfrac{1}{n}$

$\therefore 1 < \dfrac{k+\ell+1}{n} < 2$

よって，$[x]+1 < [x]+\dfrac{k+\ell+1}{n} < [x]+2$

これと②の右半分から，

$$x+\frac{\ell}{n} < [x]+2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑥}$$

⑤⑥から $[x]+1 \leqq x+\dfrac{\ell}{n} < [x]+2$ が得られる。

よって，$\left[x+\dfrac{\ell}{n}\right]=[x]+1$

(i)(ii) より，

$0 \leqq \ell \leqq n-k-1$ のとき $\left[x+\dfrac{\ell}{n}\right]=[x]$

$n-k \leqq \ell \leqq n-1$ のとき $\left[x+\dfrac{\ell}{n}\right]=[x]+1$

以上から，

$$\begin{aligned}[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right] &= [x]\times(n-k)+([x]+1)\times k \\ &= n[x]+k\end{aligned}$$

一方，(1) の $k \leqq n\,(x-[x]) < k+1$ から $n[x]+k \leqq nx < n[x]+k+1$

つまり，$[nx]=n[x]+k$ であるから，

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$$

が成り立つ。