直線 AE は $\angle\mathrm{BAC}$ の外角の二等分線であるから，

$$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=\mathrm{BA}:\mathrm{AC}=2:1$$

$$\therefore \mathrm{BE}=\mathrm{BC}=8$$

よって，$\mathrm{DE}=4+8=12$

また，中線定理より

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AD}^2+\mathrm{DC}^2)$$

$$\therefore \mathrm{AD}=2\sqrt{6}$$

さらに，方べきの定理より，

$$\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DE}=\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DF}$$

$$\therefore \mathrm{DF}=4\sqrt{6}$$

ここで，$\angle\mathrm{AFE}=\theta$ とおくと，$\angle\mathrm{ABD}=\theta$ である。

三角形 ABE の面積を S_1，三角形 DAB の面積を S_2，三角形 DFE の面積を S_3 とおく。三角形 DAB と三角形 DFE は相似であるから，

$$\begin{aligned} S&=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{DF}}S_3\\ &=\frac{3}{2}\times\left(\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\right)^2S_2\\ &=\frac{3}{2}\times\left(\frac{4\sqrt{6}}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}S_1\\ &=\frac{9}{4}S_1 \end{aligned}$$

そして，$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cdot\sin\theta=16\sin\theta$ と表されて，

余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{8^2+8^2-4^2}{2\cdot8\cdot8}=\frac{7}{8}$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

以上から，

$$\begin{aligned} S&=\frac{9}{4}\times16\times\frac{\sqrt{15}}{8}\\ &=\frac{9\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$