(1) 線分 OA の垂直二等分線上の点を表す複素数 z は，OA の中点 $\dfrac{\alpha}{2}$ の回りに A を 90° 回転して得られるから，$\dfrac{\alpha-\dfrac{\alpha}{2}}{z-\dfrac{\alpha}{2}}$ は純虚数となる。つまり，

$$\frac{\alpha-\dfrac{\alpha}{2}}{z-\dfrac{\alpha}{2}}+\overline{\left(\frac{\alpha-\dfrac{\alpha}{2}}{z-\dfrac{\alpha}{2}}\right)}=0$$

よって，

$$\alpha\left(2\overline{z}-\overline{\alpha}\right)+\overline{\alpha}\,(2z-\alpha)$$

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(2) 三角形 OAB の外心 K を表す複素数を γ とすると，K は①を満たすから①で $z=\gamma$ を代入して，

$$\overline{\alpha}\gamma+\alpha\overline{\gamma}-\alpha\overline{\alpha}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

(1) と同様に考えて，線分 OB の垂直二等分線上にもあるから，

$$\overline{\beta}\gamma+\beta\overline{\gamma}-\alpha\overline{\alpha}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

②，③から $\overline{\gamma}$ を消去して，

$$\left(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}\right)\gamma=\alpha\overline{\alpha}\beta-\alpha\beta\overline{\beta}$$

よって，

$$\gamma=\frac{|\,\alpha\,|^2\beta-|\,\beta\,|^2\alpha}{\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}$$

(3) $\gamma=\alpha+\beta$

(2) の結果を代入して，

$$\frac{|\,\alpha\,|^2\beta-|\,\beta\,|^2\alpha}{\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}=\alpha+\beta$$

分母を払って整頓すると，

$$\overline{\alpha}\beta^2-\alpha^2\overline{\beta}=0$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}=0$$

ここで $\dfrac{\beta}{\alpha}=p$ とおくと，

$$p^2-\overline{p}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

両辺の複素共役をとって

$$\left(\overline{p}\right)^2 - p = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

④，⑤から $\overline{p}$ を消去して

$$p^4 - p = 0$$

$\alpha \fallingdotseq \beta$ より $p \fallingdotseq 1$ であるから，$p^3 = 1$

$p \fallingdotseq 1$ より，$p^2 + p + 1 = 0$

したがって，$p = \dfrac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}i\right)$

つまり，$\mathrm{A}(\alpha)$ を $\mathrm{O}(0)$ の回りに $\pm\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転した点が B である。

よって，三角形 OAB は $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$，$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{2}{3}\pi$ の二等辺三角形である。