(1)

$$x=\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right)\ \ (t \geqq 0) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$
$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right) \geqq 0\ (t \geqq 0)$$

$x^2-1=\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right)^2$ となり，$t \geqq 0$ のとき $e^t-e^{-t} \geqq 0$ よって，

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

①から，

$$e^{2t}-2xe^t+1=0$$
$$e^t=x \pm \sqrt{x^2-1}$$

$x \geqq 1$ より，

$$x+\sqrt{x^2-1} \geqq 1 \geqq x-\sqrt{x^2-1}$$

よって，

$$e^t=x+\sqrt{x^2-1}$$
$$t=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

したがって，

$$\begin{aligned} I&=\int \sqrt{x^2-1}\,dx \\ &=\int \frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right)\,dt \\ &=\int \frac{1}{4}\left(e^t-e^{-t}\right)^2\,dt \\ &=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right)-2t\right\}+C\ \ (C\text{ は積分定数}) \\ &=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right)\left(e^t-e^{-t}\right)-2t\right\}+C \end{aligned}$$

①②③を用いて，

$$\begin{aligned} I&=\frac{1}{8}\times 2x\times 2\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C \\ &=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2-1}-\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right\}+C \end{aligned}$$

(2)

$$C: y=\sqrt{|x^2-1|}-x-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

$|x| \geqq 1$ のとき，④は $y=\sqrt{x^2-1}-x-1$

$|x|>1$ のとき，$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1$

$x>1$ のときは $y'>0$ で単調増加で

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-2}{\sqrt{x^2-1}+x+1}=-1$$

よって，直線 $y=-1$ は C の漸近線である。

$x<-1$ のときは $y'<0$ で y は単調減少で

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-x-1}{x}=\lim_{u\to\infty}\frac{\sqrt{u^2-1}+u-1}{-u}=-2$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{y-(-2)x\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-1}-x+1}=\lim_{u\to\infty}\frac{-2u-2}{\sqrt{u^2-1}+u-1}=-1$

よって，直線 $y=-2x-1$ は C の漸近線である。

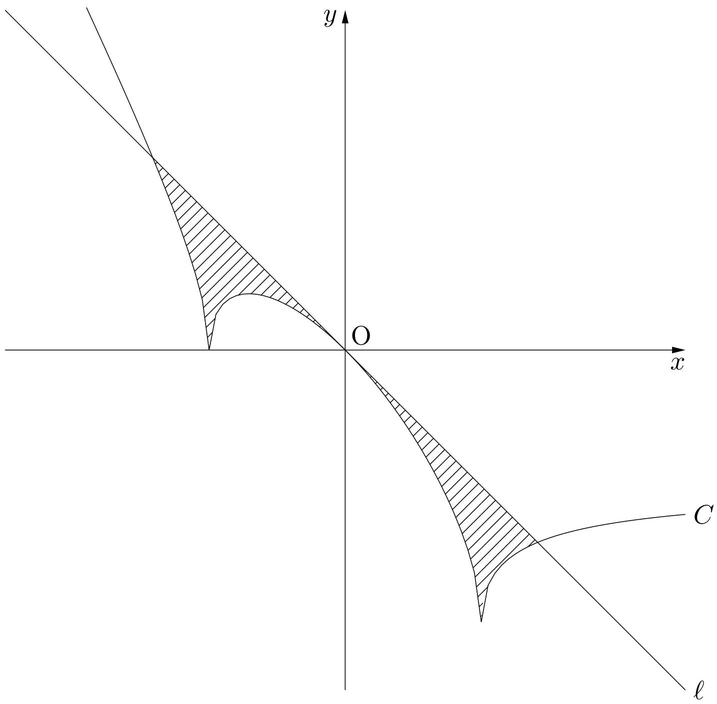
$-1<x<1$ のとき，④は $y=\sqrt{1-x^2}-x-1$

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1$$

$y'>0$ を解くと，$-1<x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

そして，$x=0$ のとき，$y'=-1$ であるから，ℓ の方程式は $y=-x$ である。

以上から，S は図の斜線部の面積である。



ℓ と C の交点の x 座標は $\pm\sqrt{2}$，0（接点）であるから，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left\{-x-\left(\sqrt{|x^2-1|}-x-1\right)\right\}dx\\&=2\sqrt{2}-2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{|x^2-1|}\,dx\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{|\,x^2-1\,|}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-1}\,dx$ であり，

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

さらに (1) の結果を用いて

$$\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{2} - \log\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}$$

以上から，$S = \log\left(\sqrt{2}+1\right) + \sqrt{2} - \dfrac{\pi}{2}$