ℓ の方向ベクトルとして，$\vec{\ell}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ とすることができる。

$\mathrm{P}(x_0\,,y_0)$，$\mathrm{Q}(x_1\,,y_1)$ とすると，

$y_0=a-\dfrac{{x_0}^2}{2a}\cdots\cdots$①

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=a\vec{\ell}\cdots\cdots$②

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdots\cdots$③

P における C の接線が ℓ と垂直であることと①を用いると，

$\sin\theta=1$ のとき，$x_0=0$，$y_0=a$ $\quad\therefore x_1=0$，$y_1=2a$

$\sin\theta\fallingdotseq 1$ のとき，$y=a-\dfrac{x^2}{2a}$ より $y'=-\dfrac{x}{a}$

よって，$\tan\theta\times\left(-\dfrac{x_0}{a}\right)=-1$ が得られて，

$\sin\theta\fallingdotseq 0$ だから，$x_0=\dfrac{a\cos\theta}{\sin\theta}$，$y_0=a\left(1-\dfrac{\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}\right)$

③から，$x_1=a\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\cos\theta\right)$，$y_1=a\left(1-\dfrac{\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}+\sin\theta\right)$

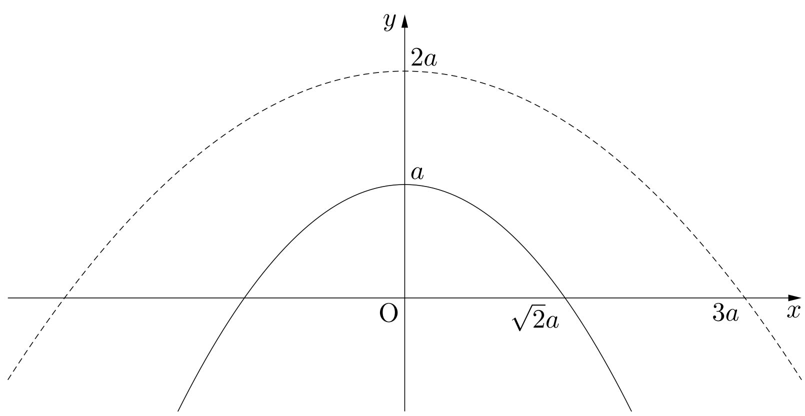
$y_1>0$ を解くと，$\sin\theta>\dfrac{1}{2}\cdots\cdots$④

この解は n を自然数として，$2n\pi+\dfrac{\pi}{6}<\theta<2n\pi+\dfrac{5\pi}{6}$ であるから，

$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5\pi}{6}$ で考えればよい。

このとき，$\dfrac{dx_1}{d\theta}=-a\left(\dfrac{1}{\sin^2\theta}+\sin\theta\right)$ より，$\dfrac{dx_1}{d\theta}<0$

よって，K の概形は図の点線部分のようになり，$x_1(\pi-\theta)+x_1(\theta)=0$ より，K は y 軸に関して対象である。



以上から，

$$S=2\int_0^{3a}y_1dx_1$$
$$=-2a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\frac{\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}+\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\sin^2\theta}+\sin\theta\right)$$

これを計算して，

$$S=\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{11\sqrt{3}}{4}+\log\left(2+\sqrt{3}\right)\right\}a^2$$