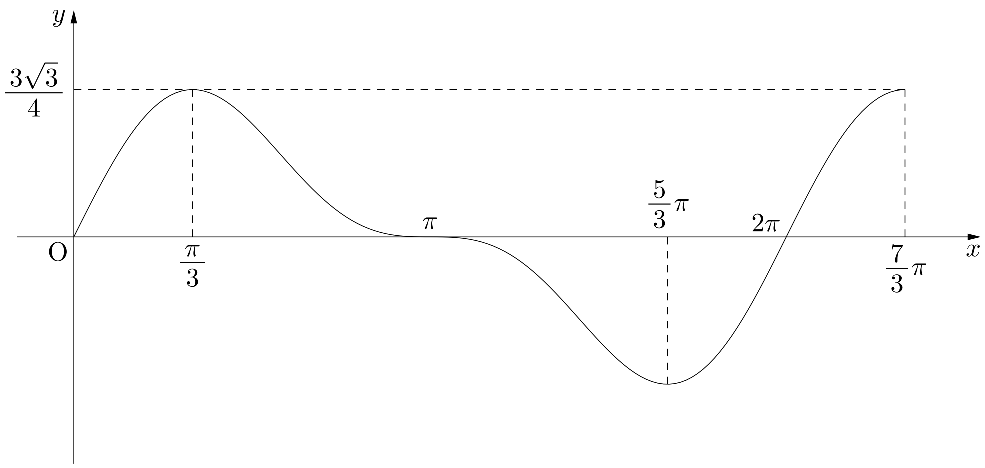
$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \sin x = \sin x(1+\cos x)$$
$$f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

$f(x)$ は周期 2π の関数であり，増減表は次のようになる。

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5}{3}\pi$		$\frac{7}{3}\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

そして，$y=f(x)$ のグラフの概形は図のようになる。



(1)　$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{3}$ のとき

区間 $[\,t\,,\,t+\pi\,]$ では，$f(x)$ は $x=\frac{\pi}{3}$ のとき最大となるから

$$g(t) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(2)　$\frac{\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ のとき

区間 $[\,t\,,\,t+\pi\,]$ では，$f(x)$ は $x=t$ のとき最大となるから

$$g(t) = f(t)$$

(3)　$\pi \leqq t \leqq \frac{4}{3}\pi$ のとき

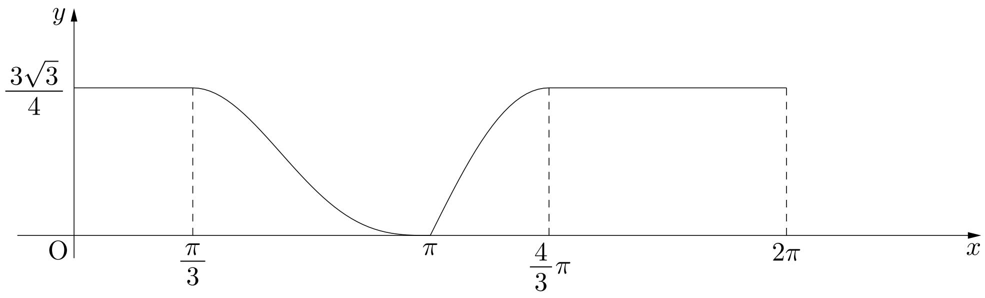
区間 $[\,t\,,\,t+\pi\,]$ では，$f(x)$ は $x=t+\pi$ のとき最大となるから

$$g(t) = f(t+\pi)$$

(4)　$\frac{4}{3}\pi \leqq t \leqq 2\pi$ のとき $f(x)$ は $x=\frac{7}{3}\pi$ のとき最大となるから

$$g(t) = f\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(1)〜(4) から，$y=g(t)$ のグラフの概形は図のようになる。



$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} g(t)dt \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \left\{ \frac{\pi}{3} + \left(2\pi - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} g(t)dt + \int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi} g(t)dt \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi + \int_0^{\pi} f(x)dx \\
&= 2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}
$$