

数列 $\{a_n\}(n = 0, 1, 2, \dots)$ を $4a_{n+1}^3 + 3a_{n+1} - a_n = 0$ で定めて, $S_n = \sum_{k=1}^n 3^{k-1} a_k^3 (n = 1, 2, \dots)$

とする。ただし, a_0 は 0 でない定数とする。

(1) $S_n = -\frac{3^n}{4} a_n + \frac{1}{4} a_0 (n = 1, 2, \dots)$ を示せ。

(2) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ として, $a_n = f(x_n)$ によって数列 $\{x_n\}(n = 0, 1, 2, \dots)$ を定める。 S_n を x_0, a_0, x_n で表せ。また, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が存在するかどうかを調べよ。