

数列  $\{a_n\}(n = 0, 1, 2, \dots)$  を  $4a_{n+1}^3 + 3a_{n+1} - a_n = 0$  で定めて,  $S_n = \sum_{k=1}^n 3^{k-1} a_k^3 (n = 1, 2, \dots)$

とする。ただし,  $a_0$  は 0 でない定数とする。

(1)  $S_n = -\frac{3^n}{4} a_n + \frac{1}{4} a_0 (n = 1, 2, \dots)$  を示せ。

(2)  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  として,  $a_n = f(x_n)$  によって数列  $\{x_n\}(n = 0, 1, 2, \dots)$  を定める。 $S_n$  を  $x_0, a_0, x_n$  で表せ。また,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  が存在するかどうかを調べよ。