$$4a_{n+1}^3+3a_{n+1}-a_n=0\ (n=0,\,1,\,2\cdots) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ①$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}a_k^3\ (n=1,\,2,\,\cdots) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ②$$

(1) $S_{n+1}-S_n=3^na_{n+1}^3$ であるから $a_{n+1}^3=\dfrac{1}{3^n}(S_{n+1}-S_n)$

①に代入して，$\dfrac{4}{3^n}(S_{n+1}-S_n)+3a_{n+1}-a_n=0$

これを $3a_{n+1}+\dfrac{4}{3^n}S_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(3a_n+\dfrac{4}{3^{n-1}}S_n\right)$ のように変形すれば，数列 $\left\{3a_n+\dfrac{4}{3^{n-1}}S_n\right\}$

は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列になるから，

$$\begin{aligned}3a_n+\frac{4}{3^{n-1}}S_n&=(3a_1+4S_1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\&=(3a_1+4a_1^3)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

①より，$3a_1+4a_1^3=a_0$ であるから，

$$3a_n+\frac{4}{3^{n-1}}S_n=a_0\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

したがって，$S_n=-\dfrac{3^n}{4}a_n+\dfrac{1}{4}a_0\ (n=1,\,2,\,\cdots)$ が成り立つ。

(2)

$$f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ③$$

$a_n=f(x_n)\ (n=0,\,1,\,2,\,\cdots)$ より，①は

$$4f(x_{n+1})^3+3f(x_{n+1})-f(x_n)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ④$$

となり，③を用いれば

$$4f(x)^3+3f(x)=\frac{1}{2}(e^{3x}-e^{-3x})=f(3x)$$

が成り立つから，④は

$$f(3x_{n+1})=f(x_n)$$

となる。$f(x)$ は単調増加関数であるから，これは $3x_{n+1}=x_n$ となり，$x_n=x_0\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\therefore\ 3^n=\frac{x_0}{x_n}$$

これと $a_n=f(x_n)=\frac{1}{2}(e^{x_n}-e^{-x_n})$ を用いて (1) に代入すれば，

$$S_n=-\frac{x_0}{4}\frac{e^{x_n}-e^{-x_n}}{2x_n}+\frac{1}{4}a_0$$

そして，$n\to\infty$ のとき，$x_n\to 0$ であるから

$$\frac{e^{x_n}-e^{-x_n}}{2x_n}=\frac{e^{x_n}-e^{-x_n}}{x_n-(-x_n)}\to\lim_{h\to 0}e^h=1$$

以上から，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ は存在して

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=-\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{4}a_0\\&=\frac{1}{4}(f(x_0)-x_0)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{x_0}-e^{-x_0}}{2}-x_0\right)\end{aligned}$$