

$O(0,0)$  を原点とする座標平面上で、放物線  $C: y = \frac{1}{2}x^2$  の上の異なる 2 点  $A, B$  (その  $x$  座標をそれぞれ  $a, b$  とする) における法線が互いに垂直を保ちながら動くとき、その交点  $P$  が描く曲線の方程式を求めよ。また、この曲線に引いた接線と  $C$  で囲まれた部分の面積  $S$  の最小値を求めよ。