　$C$ 上の A，B における法線の方程式は，それぞれ

$$a\left(y-\frac{1}{2}a^2\right)y=-(x-a) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
$$b\left(y-\frac{1}{2}a^2\right)y=-(x-b) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

①，②を解いて

$$x=-\frac{1}{2}ab(a+b)$$
$$y=\frac{1}{2}(a^2+ab+b^2)+1$$

したがって，P$(X, Y)$ とすると

$$X=-\frac{1}{2}ab(a+b)$$
$$Y=\frac{1}{2}(a^2+ab+b^2)+1=\frac{1}{2}\left\{(a+b)^2-ab)\right\}+1$$

①と②が垂直であるから，

$$ab=-1$$

これを用いて

$$X=\frac{1}{2}(a+b)$$
$$Y=\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{3}{2}$$

$a+b$ を消去して

$$Y=2X^2+\frac{3}{2}$$

$a$，$b$ が実数として存在する条件は

$$(a+b)^2-4ab \geqq 0$$

これを $X$，$Y$ で表すと，$4X^2+4 \geqq 0$ となり，これはすべての実数 $X$ に対して成り立つ。

　よって，P が描く曲線の方程式は，放物線

$$y=2x^2+\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

である。

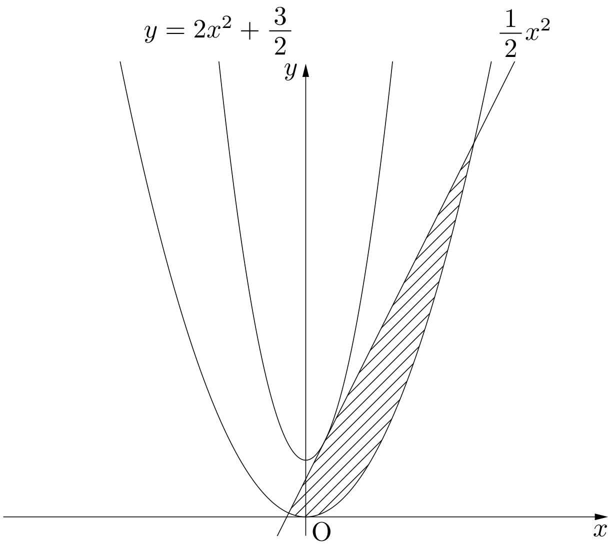
　放物線③上の点 $\left(t, 2t^2+\dfrac{3}{2}\right)$ における接線の方程式は

$$y=4tx-2t^2+\frac{3}{2}$$

である。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2-\left(4tx-2t^2+\frac{3}{2}\right)&=\frac{1}{2}(x^2-8tx+4t^2-3)\\&=\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

ただし，$\alpha=4t-\sqrt{12t^2+3}, \beta=4t+\sqrt{12t^2+3}$ とおいた。




したがって，

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left(4tx - 2t^2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{12t^2+3}\right)^3 \end{aligned}$$

これは $t=0$ のとき最小となり，最小値は $2\sqrt{3}$ である。