$$x^2+(a-b)xy-aby^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

①は

$$(x+ay)(x-by)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

となる。

(1)（a）$a=0$ のとき

②は 2 直線 $x=0$，$x=by$ を表し，この 2 直線が作る角 θ が，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ となるとき，

$$\tan\left|\frac{\pi}{3}\right|=\sqrt{3}=\frac{1}{b}$$

となるが，これを満たす 0 でない整数 b は存在しない。

（b）$b=0$ のとき

同様にして，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ となる 0 でない整数 a は存在しない。

（c）$ab\fallingdotseq 0$ のとき

②より，2 直線の方程式は $y=-\dfrac{1}{a}x$，$y=\dfrac{1}{b}x$ である。

これらの傾きをそれぞれ $\tan\alpha$, $\tan\beta$ とすると，

$$\theta=|\alpha-\beta|=\frac{\pi}{3}$$
$$\tan|\alpha-\beta|=\sqrt{3}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\pm\sqrt{3}$$

と表される。

これを展開して，$\tan\alpha=-\dfrac{1}{a}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{b}$ を代入してまとめると，

$$a+b\pm\sqrt{3}(ab-1)=0$$

これを満たす整数 a，b は存在しない。

以上から，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ となることはない。

(2)（a）$a=0$ のとき

②が表す 2 直線 $x=0$，$x=by$ が $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ を満たすのは $b=\pm1$ のときである。

（b）$b=0$ のとき

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ を満たすのは $a=\pm1$ のときである。

（c）$ab\fallingdotseq 0$ のとき

(1) と同様にして，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ となる条件は，$\tan(\alpha-\beta)=\pm1$ である。

$\tan\alpha=-\dfrac{1}{a}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{b}$ を代入してまとめると，

$$a+b=\pm(ab-1)$$

i) $a+b=ab-1$ のとき

$$(a-1)(b-1)=2$$

$ab \fallingdotseq 0$ であるから，$(\,a\,,\,b\,)=(\,2\,,\,3\,)$，$(\,3\,,\,2\,)$

ii) $a+b=-(ab-1)$ のとき

$$(a+1)(b+1)=2$$

$ab \fallingdotseq 0$ であるから，$(\,a\,,\,b\,)=(\,-2\,,\,-3\,)$，$(\,-3\,,\,-2\,)$

以上から，

$(\,a\,,\,b\,)=(\,0\,,\,1\,)$，$(\,0\,,\,-1\,)$，$(\,1\,,\,0\,)$，$(\,-1\,,\,0\,)$，$(\,2\,,\,3\,)$，$(\,3\,,\,2\,)$，$(\,-2\,,\,-3\,)$，$(\,-3\,,\,-2\,)$