2 点 P，R における円 C_1 の接線の交点を I とすると，2 つの直角三角形 $\mathrm{PO_1I}$ と $\mathrm{RO_1I}$ は合同となることから，線分 $\mathrm{O_1I}$ は $\angle\mathrm{PO_1I}$ を二等分する。同様にして結局，三角形 $\mathrm{O_1O_2O_3}$ の内心となっている。そして，$\mathrm{IP}=\mathrm{IR}=\mathrm{IQ}$ も成り立つから，I は三角形 PQR の外心でもある。

よって，$\angle\mathrm{PIQ}=2\times 60^\circ=120^\circ$ $\therefore$ $\angle\mathrm{PO_2Q}=60^\circ$

したがって，三角形 $\mathrm{PQO_2}$ は一辺の長さが r_2 の正三角形になる。

三角形 PQR に正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\sin\angle\mathrm{PRQ}}=2r$$
$$r_2=\sqrt{3}r \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

三角形 $\mathrm{O_1O_2O_3}$ にも正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{O_1O_3}}{\sin\angle\mathrm{O_1O_2O_3}}=2R$$
$$r_1+r_3=\sqrt{3}R \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

次に，三角形 $\mathrm{O_1O_2O_3}$ の面積を考えて

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{O_1O_2}\cdot\mathrm{O_2O_3}\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}r(\mathrm{O_1O_2}+\mathrm{O_2O_3}+\mathrm{O_3O_1})$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}(r_1+r_2)(r_2+r_3)=r(r_1+r_2+r_3)$$

展開して①，②を代入して

$$3r^2+\sqrt{3}r\cdot\sqrt{3}R+r_1r_3=4r(r+R)$$
$$r_1r_3=r(R+r) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

②，③を満たす異なる正の数 r_1，r_3 が存在する条件は

$$(r_1+r_3)^2-4r_1r_3>0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$
$$r_1+r_3>0,\ r_1r_3>0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

である。

④に②，③を代入して整理すると，

$$(3R+2r)(R-2r)>0$$

$3R+2r>0$ より $R>2r$

また，$R>0$，$r>0$ であるから，⑤は成り立っている。

以上から求める条件は $R>2r$