$$C : y^2 - 2xy + x^4 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

C は原点に関して対称であるから，$x \geqq 0$ において C を考えればよい。以下，$x \geqq 0$ とする。

このとき，①は $y = x \pm x\sqrt{1-x^2}$

$x = 0$ のとき，$y = 0$，$x = 1$ のとき，$y = 1$

$0 < x < 1$ とする。

(i)

$$y = x + x\sqrt{1-x^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} - (2x^2 - 1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = -\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} < 0$$

よって，②が表す曲線は上に凸である。

$y' > 0$ を解くと $0 < x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，y は $0 < x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で増加し，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} < x < 1$ で減少する。

そして，$\displaystyle\lim_{x \to 1-0} y' = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x \to +0} y' = 2$

(ii)

$$y = x - x\sqrt{1-x^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

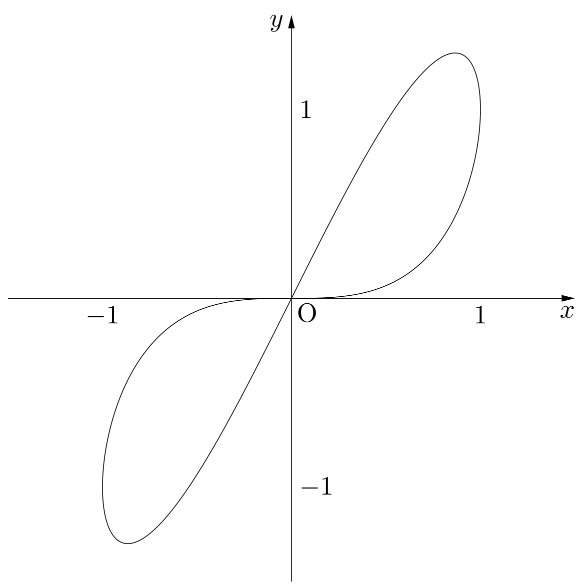
$$y' = 1 - \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$1 - \sqrt{1-x^2} > 0$，$\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ より $y' > 0$ となり，y は単調増加である。

$$y'' = \frac{x(3-2x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0$$

よって，③が表す曲線は下に凸であり，$\displaystyle\lim_{x \to 1-0} y' = +\infty$，$\displaystyle\lim_{x \to +0} y' = 0$

(i)，(ii) から，曲線 C の概形は下図のようになる。



以上から，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} &= \int_0^1 \left\{\left(x + x\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(x - x\sqrt{1-x^2}\right)^2\right\} dx \\ &= 4\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx\end{aligned}$$

ここで，$x = \sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{2\pi} = 4 \times \dfrac{\pi}{16}$ より，$V = \dfrac{\pi^2}{2}$