

(1)  $y = \frac{1}{2^{n-1}} f_1(x - 2(n-1))$  は,

$0 \leq x - 2(n-1) < 1$  つまり,  $2(n-1) \leq x < 2n-1$  のとき,

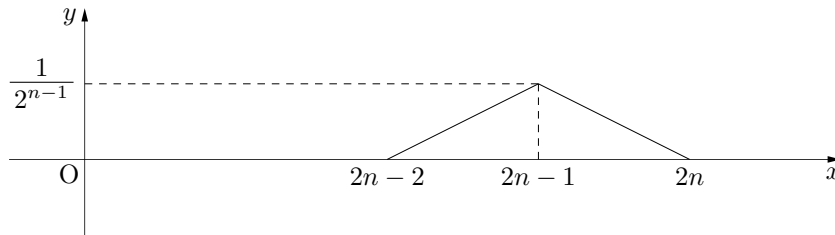
$$y = \frac{1}{2^{n-1}} \{x - 2(n-1)\} = \frac{1}{2^{n-1}} x - \frac{n-1}{2^{n-2}}$$

$1 \leq x - 2(n-1) \leq 2$  つまり,  $2n-1 \leq x \leq 2n$  のとき,

$$y = \frac{1}{2^{n-1}} \{-x + 2(n-1) + 2\} = -\frac{1}{2^{n-1}} x - \frac{n}{2^{n-2}}$$

であり,  $x = 2n-1$  のとき,  $y = \frac{1}{2^{n-1}}$  である。

したがって,  $y = \frac{1}{2^{n-1}} f_1(x - 2(n-1))$  のグラフは下図のようになる。



そして,

$$y = \frac{1}{2^{n-1}} x - \frac{n-1}{2^{n-2}} \text{ より, } x = 2^{n-1} y + 2(n-1)$$

$$y = -\frac{1}{2^{n-1}} x - \frac{n}{2^{n-2}} \text{ より, } x = -2^{n-1} y + 2n$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} V_n &= \int_0^{\frac{1}{2^{n-1}}} \{(-2^{n-1} y + 2n)^2 - (2^{n-1} y + 2(n-1))^2\} dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2^{n-1}}} \{-(2n-1) \cdot 2^{n+1} y + 4(2n-1)\} dy \\ &= (2n-1) \left[ -2^n y^2 + 4y \right]_0^{\frac{1}{2^{n-1}}} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } V_n = \frac{2(2n-1)}{2^{n-1}} \pi$$

$$(2) V = \sum_{k=1}^n V_k \text{ とおくと, } V = 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^{k-1}}$$

$$\text{ここで, } T = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^{k-1}} \text{ とおくと, } V = 2\pi T$$

$$\text{そして, } T - \frac{1}{2} T = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2} T = 1 + 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$T = 10 - \frac{14}{2^n} - \frac{4n}{2^n}$$

$n \geq 2$  としてよいから, 二項定理により

$$2^n = (1+1)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n > {}_n C_2$$

$$2^n > \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$$

が成り立って、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$  であるから、はさみうちの原理により、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$  となる。

また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$  である。

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T = 10$  が成り立つから、 $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$  は存在して、 $20\pi$  である。