(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \sin\theta\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1-(\sin\theta\cos\theta)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{4-\sin^2 2\theta} \end{aligned}$$

となり，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$0 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$ であるから，

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leqq S_1 \leqq \frac{1}{2}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (\cos\theta - 1\,,\,\sin\theta\,,\,0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (\sin\theta - 1\,,\,0\,,\,\cos\theta)$ となるから，

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2 &= (\cos\theta-1)^2 + \sin^2\theta \\ &= 2\,(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2 = 2\,(1-\sin\theta)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-\sin\theta)\,(1-\cos\theta)$$

となり，

$$S_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4\,(1-\sin\theta)\,(1-\cos\theta) - (1-\sin\theta)^2\,(1-\cos\theta)^2}$$

ここで，$\sin\theta + \cos\theta = u$ とおくと

$$\begin{aligned} (1-\sin\theta)\,(1-\cos\theta) &= 1 - (\sin\theta+\cos\theta) + \sin\theta\cos\theta \\ &= 1 - u + \frac{1}{2}\left(u^2-1\right) \\ &= \frac{1}{2}\,(u-1)^2 \end{aligned}$$

そして，$u = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ であり，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$1 \leqq u \leqq \sqrt{2}$ となり，

$0 \leqq (1-\sin\theta)\,(1-\cos\theta) \leqq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

つまり，$0 \leqq (1-\sin\theta)\,(1-\cos\theta) \leqq \frac{1}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right)$

したがって，$(1-\sin\theta)\,(1-\cos\theta) = t$ とおけば，$0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right)$ となる。

このことと，$\frac{1}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right) < 1$ より，

$S_2 = \frac{1}{4}\sqrt{4t-t^2} = \frac{1}{4}\sqrt{-(t-2)^2+4}$ のとる値の範囲は，S_2 が増加関数となること，および $t = \frac{1}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right)$ のとき，$4t-t^2$ の値が $\frac{1}{4}\left(7-4\sqrt{2}\right)$ となることを考えれば，

$$0 \leqq S_2 \leqq \frac{1}{8}\sqrt{7-4\sqrt{2}}$$