

(1) 数列 $\{a_n\}$ は

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots\dots$$

となり, この階差数列を $\{b_n\}$ とすると,

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots\dots$$

となる。この階差数列を $\{c_n\}$ とすると,

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\dots$$

となるから,

$$c_n = (-1)^{n-1}$$

そして,

$$b_{n+1} - b_n = c_n$$

よって, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \\ &= 1 + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{1 - (-1)} \\ &= \frac{1}{2} \{3 - (-1)^{n-1}\} \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも含まれる。

さらに, $a_{n+1} - a_n = b_n$ であるから,

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \{3 - (-1)^{n-1}\} \\ &= 1 + \frac{3}{2}(n-1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^{n-1}}{1 - (-1)} \\ &= \frac{1}{4} \{6n - 3 + (-1)^{n-1}\} \end{aligned}$$

これは, $n = 1$ のときも含まれる。よって, $a_n = \frac{1}{4} \{6n - 3 + (-1)^{n-1}\}$

(2)

$$\begin{aligned} S_{2m} &= \sum_{k=1}^{2m} a_k \\ &= \sum_{i=1}^m (a_{2i-1} + a_{2i}) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{4} \{6(2i-1) - 3 + (-1)^{2i-2} + 6 \cdot 2i - 3 + (-1)^{2i-1}\} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m (24i - 12) \\ &= 3 \sum_{i=1}^m (2i - 1) \\ &= 3m^2 \end{aligned}$$

これが10の倍数となるのは m^2 が10の倍数のとき、つまり、 m が10の倍数であるから、 $m = 10p$
(p は自然数)と表され、 $S_{2m} = 300p^2$ となる。 $S_{2m} \leq 100000$ に代入して

$$3p^2 \leq 1000 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

そして、

$$p = 18 \text{ のとき, } 3p^2 = 972$$

$$p = 19 \text{ のとき, } 3p^2 = 1083$$

であるから、 $\textcircled{1}$ を満たす最大の自然数自然数 p は18である。

以上から、求める m は180である。