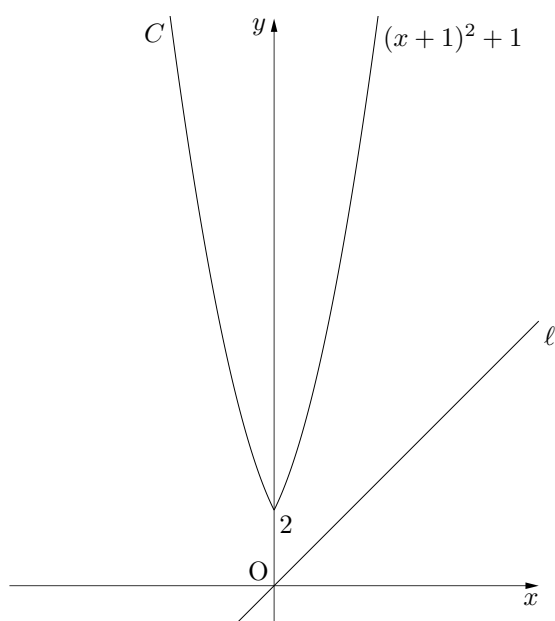


C は y 軸に関して対称であり，図のようになる。



ℓ と C が共有点をもたないのは，放物線 $y = (x+1)^2 + 1$ と直線 ℓ が共有点をもたないときであるから， $(x+1)^2 + 1 = ax$ ，つまり $x^2 + (2-a)x + 2 = 0$ が実数解を持たないときである。

判別式 $D < 0$ より

$$\begin{aligned}(2-a)^2 - 4 \times 2 &< 0 \\ 2 - 2\sqrt{2} &< a < 2 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

ここで $a \geq 0$ より

$$0 \leq a < 2 + 2\sqrt{2}$$

次に，放物線 $y = (x+1)^2 + 1$ 上の点 $(t, (t+1)^2 + 1)$ ($t > 0$) における接線の傾きは $2(t+1)$ であり， $(0, 2)$ における接線の傾きは 2 である。そして， $2(t+1) \geq 2$ である。

(1) $0 \leq a \leq 2$ のとき

ℓ に接して C 上の点 $(0, 2)$ を通る円の半径を r_1 とすると， $0 < r < r_1$ である。

そして，点と直線の距離の式から， $2r_1 = \frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}}$

よって， $r_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ となるから， r のとる値の範囲は， $0 < r < \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ である。

(2) $2 < a < 2 + 2\sqrt{2}$ のとき

ℓ に接して放物線 $y = (x+1)^2 + 1$ と点 $(t, (t+1)^2 + 1)$ ($t > 0$) においても接する円の半径の最小値を r_2 とすると， $0 < 2r < r_2$

点と直線の距離の式から、点 $(t, (t+1)^2 + 1)$ と ℓ の距離は、

$$\begin{aligned}\frac{|at - (t+1)^2 - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \{(t+1)^2 + 1 - at\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \left\{ \left(t - \frac{a-2}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(4 + 4a - a^2) \right\}\end{aligned}$$

よって、 $2r_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \times \frac{1}{4}(4 + 4a - a^2) = \frac{4 + 4a - a^2}{4\sqrt{a^2 + 1}}$ となるから、 r のとる値の範囲は、
 $0 < 2r < r_2$ つまり、 $0 < r < \frac{4 + 4a - a^2}{8\sqrt{a^2 + 1}}$

(1), (2) から、 r のとる値の範囲は、

$$\begin{aligned}0 \leq a \leq 2 \text{ のとき, } 0 < r &< \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ 2 < a < 2 + 2\sqrt{2} \text{ のとき, } 0 < r &< \frac{4 + 4a - a^2}{8\sqrt{a^2 + 1}}\end{aligned}$$