

$$1 \leq x \leq y \leq z \quad \dots\dots\dots ①$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5} \quad \dots\dots\dots ②$$

① から, $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \leq 1$

よって,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$$

② を代入して,

$$\frac{12}{5} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 \quad \dots\dots\dots ③$$

ここで, $x \geq 3$ と仮定すると, $1 + \frac{1}{x} \leq \frac{4}{3}$

よって,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \quad \dots\dots\dots ④$$

そして, $\frac{12}{5} - \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4}{5 \times 27} (3 \times 27 - 16 \times 5) > 0$

よって,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 < \frac{12}{5} \quad \dots\dots\dots ⑤$$

④ と ⑤ から, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 < \frac{12}{5}$

これは ③ に矛盾するから, $x < 3$

よって, $x = 2$

このとき, ② は

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{8}{5} \quad \dots\dots\dots ⑥$$

となって, $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y}$ より, $\left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{y}\right)^2$

よって,

$$\frac{8}{5} \leq \left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 \quad \dots\dots\dots ⑦$$

ここで, $y \geq 4$ と仮定すると, $1 + \frac{1}{y} \leq \frac{5}{4}$ となり,

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 \leq \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \dots\dots\dots ⑧$$

そして, $\frac{8}{5} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{5 \times 16} (8 \times 16 - 5 \times 25) > 0$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 < \frac{8}{5} \quad \dots\dots\dots ⑨$$

⑧ と ⑨ から, $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 < \frac{8}{5}$

これは ⑦ と矛盾するから, $y < 4$

$x \leq y$ で $x = 2$ であるから, $y = 2, 3$

$y = 2$ のとき, $z = 15$

$y = 3$ のとき, $z = 5$

以上から, $(x, y, z) = (2, 2, 15), (2, 3, 5)$