(1) $\mathrm{EC}=x$ とおく。

余弦定理により，

$$\mathrm{BC}^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cdot\cos60^\circ=21$$

したがって，$\mathrm{BC}=\sqrt{21}$

$\mathrm{AD}:\mathrm{DC}$ より，$\mathrm{AD}=\dfrac{5}{3}$，$\mathrm{DC}=\dfrac{10}{3}$

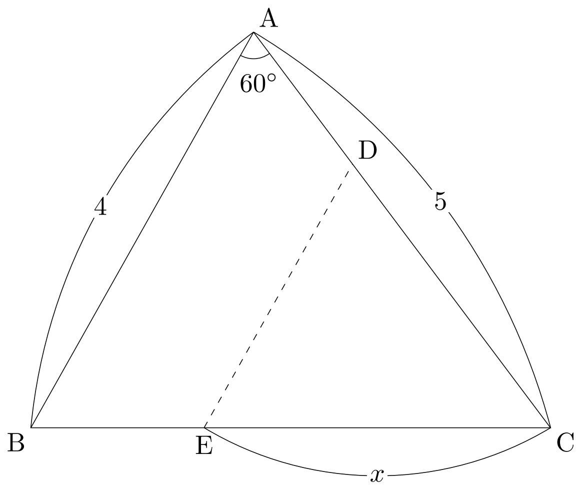
三角形 ABC の面積を $S$ とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\sin60^\circ=5\sqrt{3}$$

このとき，

$$\begin{aligned}T&=\frac{\sqrt{21}-x}{\sqrt{21}}\cdot S\times\frac{\frac{10}{3}\cdot x}{5\sqrt{21}}\cdot S\\&=\frac{50}{21}\left(-x^2+\sqrt{21}x\right)\\&=\frac{50}{21}\left\{-\left(x-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2+\frac{21}{4}\right\}\end{aligned}$$

となり，$0<x<\sqrt{21}$ において，$x=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ のとき，$T$ は最大値 $\dfrac{25}{2}$ をとる。




(2) 4 点 A，B，E，D が同一円周上にあるとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{DEG}$ は相似となる。相似比を $k$ とすると，$\mathrm{DE}=4k$，$\mathrm{EC}=5k$，$\mathrm{CD}=\sqrt{21}k$ $(0<k<1)$ である。

線分 DE が $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を二等分するとき，$\triangle\mathrm{DEC}$ の面積は $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ となる。

したがって，

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{EC}\cdot\sin60^\circ=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot4k\cdot5k\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$k^2=\frac{1}{2}$$

$0<k<1$ より，$k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

以上から $\mathrm{DE}=2\sqrt{2}$