

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots\dots ①$$

$$C_2 : x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \ (x > 0) \quad \dots\dots\dots ②$$

C_2 上の点 (X, Y) を原点 O のまわりに $\frac{\pi}{4}$ 回転した点を (α, β) とすると,

$$\begin{aligned} X + Yi &= (\alpha + \beta i) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)i \end{aligned}$$

よって,

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta), \ Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)$$

これを ② に代入して整理して, $\alpha\beta = \frac{\sqrt{3}}{4}$

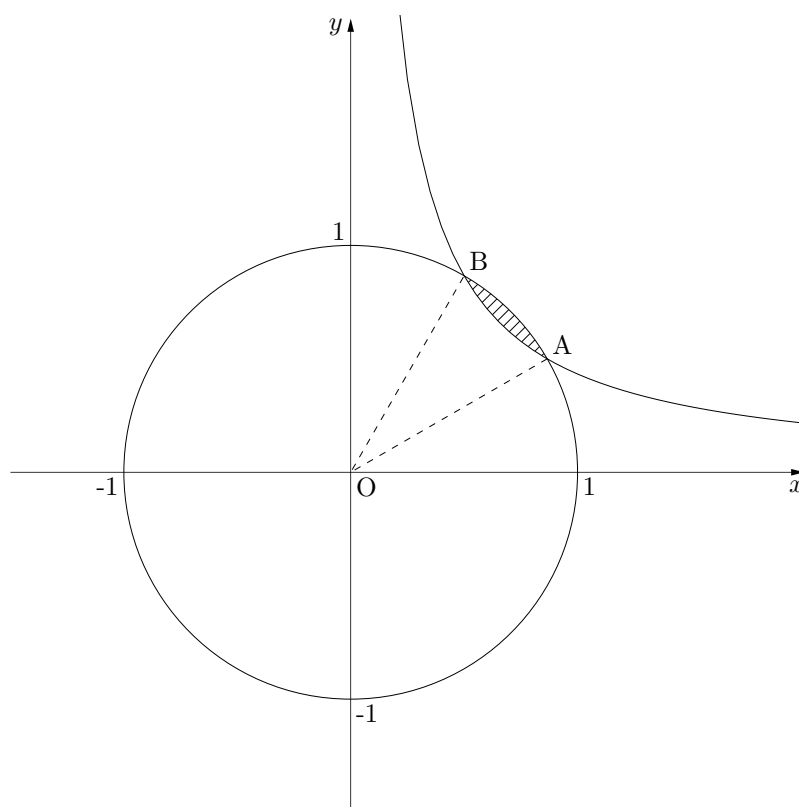
ただし, $x > 0$ より $\alpha + \beta > 0, \ \beta > -\alpha$

よって, C_2 を原点 O のまわりに $\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線は

$$C'_2 : y = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{x} \ (y > -x)$$

で表される。

C_1 と C'_2 の交点の座標は $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \ B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。



よって,

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{x} dx$$

そして, $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$ であるから,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{x} dx &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\log |x| \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \log 3 \end{aligned}$$

以上から,

$$S = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \log 3$$

注 次のようにして直接求めることもできる。

$p = \sin \frac{\pi}{6}$ において,

$$S = \int_{-p}^p \left(\sqrt{1-y^2} - \sqrt{y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) dy$$

ただし, 不定積分

$$2 \int \sqrt{t^2 + a^2} dt = t\sqrt{t^2 + a^2} + a^2 \log \left(t + \sqrt{t^2 + a^2} \right)$$

が前提となる。