$$y = x + \sqrt{1-x^2}$$

$-1 < x < 1$ のとき

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$-1 < x < 0$ のとき $y' > 0$ である。

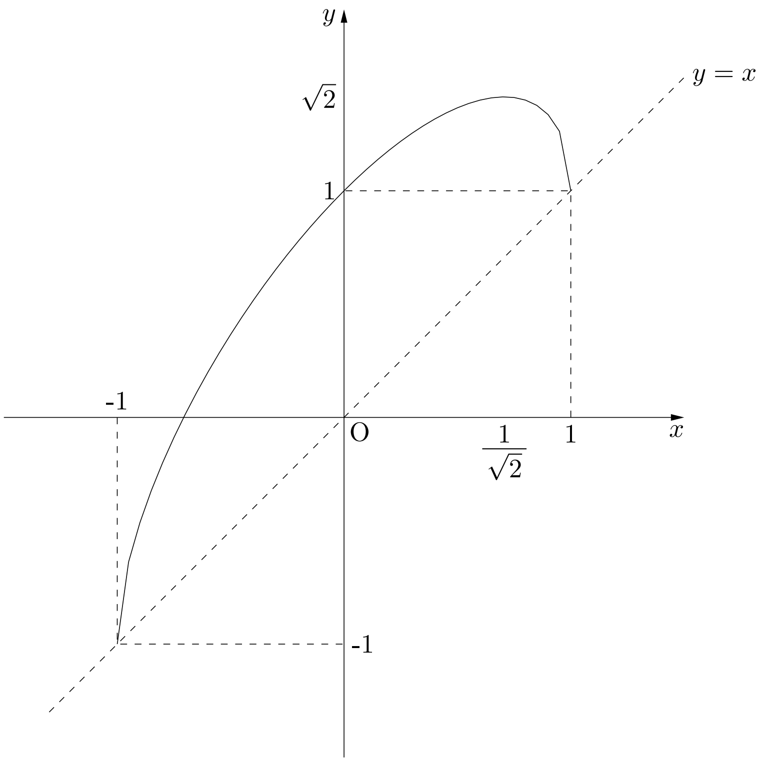
$0 < x < 1$ のとき $y' > 0$ を解くと $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

よって，$0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $y' > 0$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$ のとき $y' < 0$ である。

そして，$x = -1$ のとき $y = -1$，$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $y = \sqrt{2}$，$x = 1$ のとき $y = 1$ である。

また，$y'' = -\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ となるから常に $y'' < 0$ となり，$C$ は上に凸である。

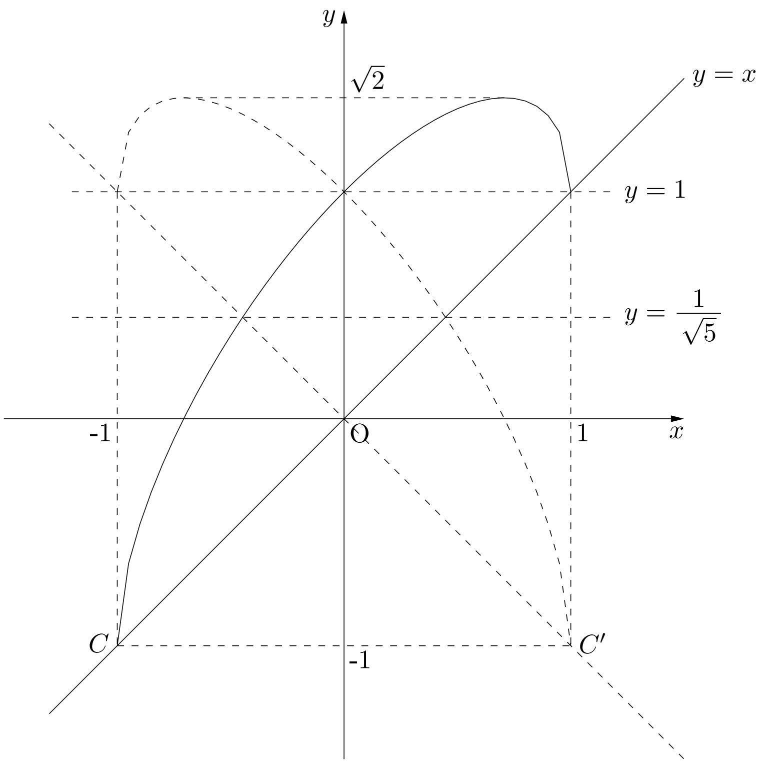
したがって，$C$ の概形は下図のようになる。




$C$ を $y$ 軸に関して対称に移動したグラフを $C'$ とする。$C$ と $C'$ の交点は $(0, 1)$，$C'$ と直線 $y = x$ の交点は $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ である。

立体 $K$ のうち，$-1 \leqq y < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}} \leqq y \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq \sqrt{2}$ の範囲にある立体の体積をそれぞれ，$V_1$，$V_2$，$V_3$ とすると，

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$




$$V_1=\pi\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}x^2dy-\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot1$$

$$=\pi\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}x^2dy-\frac{1}{3}\pi$$

① より，$dy=\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}x^2dy=\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}x^2\frac{dx}{dy}dy$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}x^2\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

ここで，

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

よって

$$\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}x^2dy=\left[\frac{1}{3}x^3+\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{23}{15\sqrt{5}}+\frac{1}{3}$$

よって，

$$V_1=\frac{23}{15\sqrt{5}}\pi$$

次に

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \pi\int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{1} x^2 dy \\
&= \pi\int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{1} y^2 dy \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15\sqrt{5}}\right)\pi
\end{aligned}
$$

そして，① を $x$ について解いて，$x = \dfrac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{2-y^2}\right)$

$$
\begin{aligned}
V_3 &= \pi\int_{1}^{\sqrt{2}} \left\{\left(\frac{1}{2}\left(y + \sqrt{2-y^2}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(y - \sqrt{2-y^2}\right)\right)^2\right\} dy \\
&= \pi\int_{1}^{\sqrt{2}} y\sqrt{2-y^2} dy \\
&= \pi\left[-\frac{1}{3}\left(2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{3}\pi
\end{aligned}
$$

以上から，

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 + V_3 \\
&= \frac{23}{15\sqrt{5}}\pi + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15\sqrt{5}}\right)\pi + \frac{1}{3}\pi \\
&= \left(\frac{22}{15\sqrt{5}} + \frac{2}{3}\right)\pi
\end{aligned}
$$