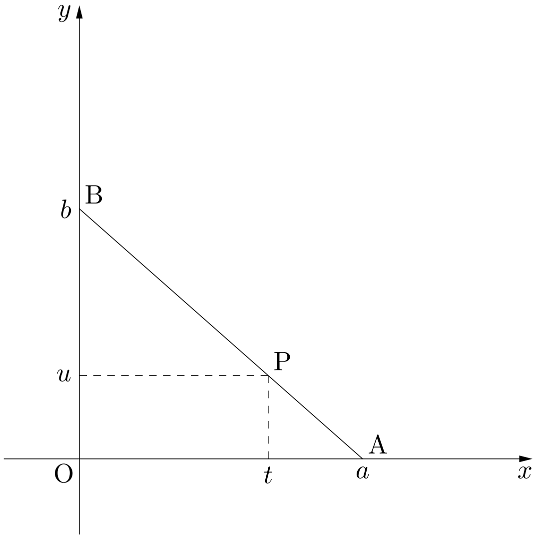


(1) $\mathrm{AB}=1$ より $a^2+b^2=1$ であり，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ であるので $b=\sqrt{1-a^2}$ である。

点 $\mathrm{P}(t\,,\,u)$ は線分 AB 上にあり，$0 \leqq t \leqq a$ を満たす。

(a) $a=0$ のとき

$b=1$，$t=0$，$u=1$

(b) $a=1$ のとき

$b=0$，$0 \leqq t \leqq 1$，$u=0$

(c) $0<a<1$ のとき

直線 AB を表す式 $y=-\dfrac{b}{a}+b$ に $x=t$，$y=u$ を代入して

$$u=-\frac{b}{a}t+b=\sqrt{1-a^2}\left(1-\frac{t}{a}\right)$$

$f(a)=\sqrt{1-a^2}\left(1-\dfrac{t}{a}\right)$ とおくと，$u=f(a)$ である。

$$f'(a)=-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\left(1-\frac{t}{a}\right)+\sqrt{1-a^2}\cdot\frac{t}{a^2}$$

$f'(a)>0$ を解くと $a<\sqrt[3]{t}$ である。

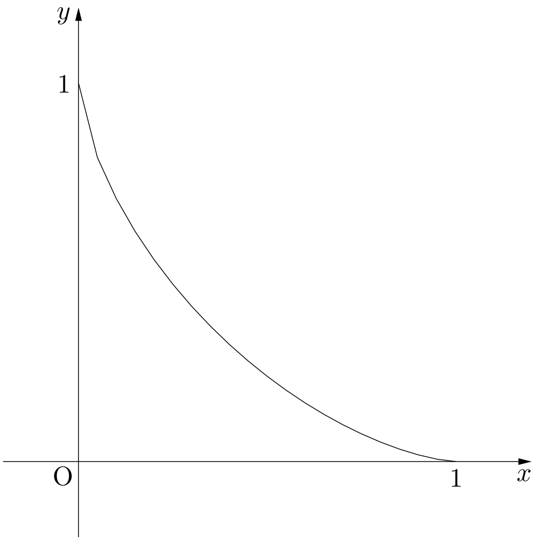
よって，$0<a<\sqrt[3]{t}$ のとき $f'(a)>0$，$\sqrt[3]{t}<a<1$ のとき $f'(a)<0$ となり，$f(a)$ は $a=\sqrt[3]{t}$ のときに極大で最大となる。最大値は $f\left(\sqrt[3]{t}\right)=\left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ である。

よって，$0<f(a) \leqq \left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

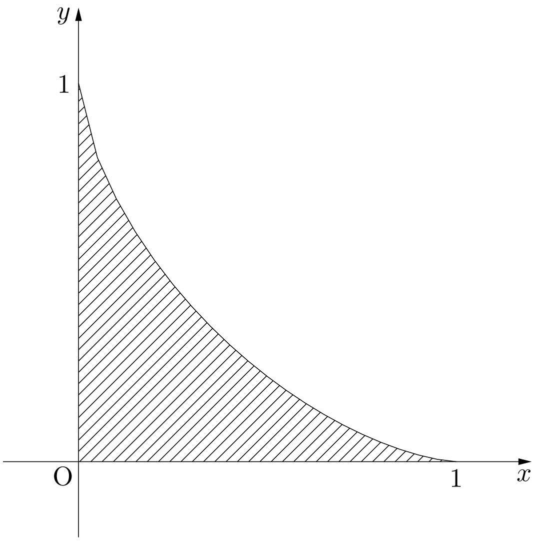
以上より，$0 \leqq u \leqq \left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ $\quad(0 \leqq t \leqq 1)$

(2) $\left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ は $0<t<1$ において単調減少である。

したがって，$y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ のグラフの概形は下図のようになる。



以上から，a が変化するとき，線分 AB が通過する領域は下図の斜線部分のようになる。



よって，

$$S=\int_0^1 \left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$x^{\frac{1}{3}}=\sin\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$x=\sin^3\theta$ であり，$dx=3\cos\theta\sin^2\theta d\theta$ である $(x:0\to 1$ のとき $\theta:0\to\dfrac{\theta}{2})$。

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} \cdot 3\cos\theta\sin^2\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos\theta|^3 \cdot 3\cos\theta\sin^2\theta d\theta \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\sin^2 2\theta d\theta
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\cos^4\theta\sin^2 2\theta &= \cos^2\theta \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2\theta \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta) \\
&= \frac{1}{16}\left\{1+\cos 2\theta - \cos 4\theta - \frac{1}{2}(\cos 6\theta + \cos 2\theta)\right\}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\int \cos^4\theta\sin^2\theta d\theta = \frac{1}{16}\left(\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta - \frac{1}{12}\sin 6\theta\right) + C
$$

以上から，

$$
\begin{aligned}
S &= 3 \times \frac{1}{16}\left[\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta - \frac{1}{12}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3}{16} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{3}{32}\pi
\end{aligned}
$$