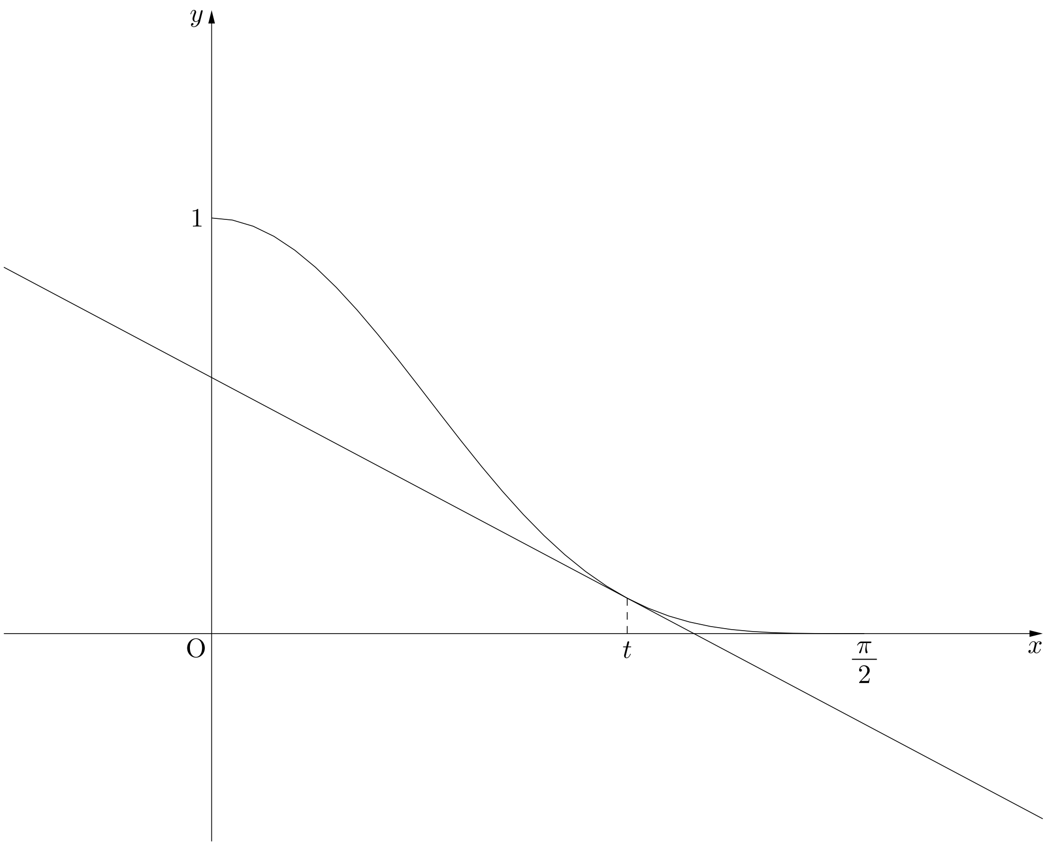

$g(x) = \cos^{2n} x \ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$g'(x) = -2n \sin x \cos^{2n-1} x$ である。

点 P における C の接線の方程式は

$$y = -2n \sin t \cos^{2n-1} t \times (x - t) + \cos^{2n} t$$

である。

よって，

$$f(t) = 2nt \sin t \cos^{2n-1} t + \cos^{2n} t$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2n \sin t \cos^{2n+1} t + 2nt \cos^{2n} t - 2nt(2n-1) \sin^2 t \cos^{2n-2} t - 2n \sin t \cos^{2n-1} t \\ &= 2nt \cos^{2n-2} t(1 - 2n \sin^2 t) \\ &= 2nt \cos^{2n-2} t(1 + \sqrt{2n} \sin t)(1 - \sqrt{2n} \sin t) \end{aligned}$$

となり，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において $\sin t = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ を満たす定数 t がただひとつ存在する。それを α とすると，

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2n}}, \ \cos \alpha = \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n}}, \ \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

で，$0 < t < \alpha$ において $f'(t) > 0$，$\alpha < t < \dfrac{\pi}{2}$ において $f'(t) < 0$ となるから，$f(t)$ は $t = \alpha$ のとき極大で最大となる。

よって，

$$\begin{aligned} M &= f(\alpha) \\ &= 2n\alpha \sin \alpha \cos^{2n-1} \alpha + \cos^{2n} \alpha \\ &= \cos^{2n}(2n\alpha \tan \alpha + 1) \\ &= \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n \left(\frac{2n}{\sqrt{2n-1}}\alpha + 1\right) \end{aligned}$$

ここで，$\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^n$ について，$2n-1=N$ とおくと

$$\begin{aligned}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n &= \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{-n} \\ &= \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{-n} \\ &= \left(1+\frac{1}{N}\right)^{-\frac{1}{2}(N+1)} \\ &= \left\{\left(1+\frac{1}{N}\right)^N\right\}^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n &= \lim_{N\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{N}\right)^N\right\}^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}}\times 1 \\ &= e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

また，

$$\frac{2n}{\sqrt{2n-1}}\alpha = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-1}}\times\sqrt{2n}\alpha = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-1}}\times\frac{\alpha}{\sin\alpha}$$

となり，$n\to\infty$ のとき $\alpha\to 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-1}} = 1$

以上から，

$$\lim_{n\to\infty} M = e^{-\frac{1}{2}}(1\times 1+1) = \frac{2}{\sqrt{e}}$$