(1) A$\left(-1-\dfrac{1}{\tan\alpha}\,,0\right)$ となるから直線 PA の方程式は $y=\left(x+1+\dfrac{1}{\tan\alpha}\right)\tan 2\alpha$ である。

これに $x=a$，$y=b$ を代入し整理して

$$b\tan^2\alpha+2(a+1)\tan\alpha+2-b=0$$

$0<2\alpha<\pi$ より，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\tan\alpha>0$

よって，$\tan\alpha=\dfrac{1}{b}\left\{-a-1+\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}\right\}$

同様にして $\tan\beta=\dfrac{1}{b}\left\{a-1+\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}\right\}$

(2) $\mathrm{AB}=\mathrm{AO}+\mathrm{OB}$ であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\frac{1}{\tan\alpha}+1+\frac{1}{\tan\beta}+1\\&=\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}+2\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan\alpha}&=\frac{b}{\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}-(a+1)}\\&=\frac{1}{b-2}\left(\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}+b^2-b\right)\end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{1}{\tan\beta}=\frac{1}{b-2}\left(\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}+b^2-b\right)$$

$$\mathrm{AB}=\frac{1}{b-2}\left\{\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}+\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}+2(b-1)\right\}$$

ここで，

$$f(a)=\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}+\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}$$

とおくと，

$$f'(a)=\frac{a+1}{\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}}+\frac{a-1}{\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}}$$

となるから，

(a) $a\leqq -1$ のとき　$f'(a)<0$

(b) $1\leqq a$ のとき　$f'(a)>0$

(c) $-1<a<1$ のとき

$f'(a)>0$ を解くと

$$\frac{a+1}{\sqrt{(a+1)^2+b(b-2)}}>\frac{1-a}{\sqrt{(a-1)^2+b(b-2)}}$$

平方しても同値で

$$(a+1)^2\left\{(a-1)^2+b(b-2)\right\}>(a-1)^2\left\{(a+1)^2+b(b-2)\right\}$$

$$(a+1)^2b(b-2)>(a-1)^2b(b-2)$$

$b>2$ より

$$(a+1)^2>(a-1)^2$$

$$a>0$$

したがって，$a<0$ で $f'(a)<0$，$a>0$ で $f'(a)>0$ となり，$f(a)$ は $a=0$ のとき極小で最小となる。

AB の最小値は

$$\frac{1}{b-2}\left\{f(0)+2(b-1)\right\}=\frac{4(b-1)}{b-2}$$

(3) $S=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot b$

b を固定して a を変化させると，(2) の結果より AB は $a=0$ のとき，最小値 $\frac{4(b-1)}{b-2}$ をとる。

このとき，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4(b-1)}{b-2}\cdot b \\ &= 2\left(b+1+\frac{2}{b-2}\right) \\ &= 2\left(b-2+\frac{2}{b-2}+3\right) \end{aligned}$$

$b>2$ より，相加・相乗平均の関係から

$$b-2+\frac{2}{b-2}\geqq 2\sqrt{2}$$

よって，$S\geqq 2\left(2\sqrt{2}+3\right)$ となり，等号は $b-2=\frac{2}{b-2}$ つまり，$b=2+\sqrt{2}$ のとき成り立つ。

以上から，S は $a=0$，$b=2+\sqrt{2}$ のとき，最小値 $2\left(2\sqrt{2}+3\right)$ をとる。