

(1) 点 M は直線 OP 上にあるから, k を実数の定数として

$$\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OP}$$

と表される。

$\overrightarrow{OP} = 2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$ を代入して

$$\overrightarrow{OM} = k(2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$$

点 M は平面 ABC 上にもあるから

$$2k + k + 3k = 1$$

$$k = \frac{1}{6}$$

である。

したがって,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{6}(2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$$

(2) $OH : HC = m : (1 - m)$ (m は定数) とおくと,

$$\overrightarrow{OH} = m\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OM}$$

$$= -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\vec{c}$$

MH は OC に垂直であるから,

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{c} = 0$$

$$-\frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{6}\vec{b} \cdot \vec{c} + \left(m - \frac{1}{2}\right)|\vec{c}|^2 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad |\vec{c}|^2 = 1 \text{ より,}$$

$$m = \frac{3}{4}$$

したがって,

$$OH : HC = 3 : 1$$

であり,

$$\overrightarrow{MH} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

$$= -\frac{1}{12}(4\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})$$

である。

$$|\overrightarrow{MH}|^2 = \left(\frac{1}{12}\right)^2 (16|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 9|\vec{c}|^2 + 16\vec{a} \cdot \vec{b} - 12\vec{b} \cdot \vec{c} - 24\vec{a} \cdot \vec{c})$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right)^2 (16 + 4 + 9 + 8 - 6 - 12)$$

$$= \frac{19}{12^2}$$

よって, $MH = \frac{\sqrt{19}}{12}$ である。

$$(3) (2) \text{ より, } \overrightarrow{\text{HM}} = \frac{1}{12} (4\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})$$

また, $\overrightarrow{\text{HA}} = \overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{OH}} = \frac{1}{4} (4\vec{a} - 3\vec{c})$ であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{HA}}|^2 &= \frac{1}{16} (16|\vec{a}|^2 + 9|\vec{c}|^2 - 24\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{13}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{HA}} \cdot \overrightarrow{\text{HM}} &= \frac{1}{4} (4\vec{a} - 3\vec{c}) \cdot \frac{1}{12} (4\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}) \\ &= \frac{1}{48} (16|\vec{a}|^2 + 9|\vec{c}|^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{b} \cdot \vec{c} - 24\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{48} (16 + 9 + 4 - 3 - 12) \\ &= \frac{7}{24} \end{aligned}$$

以上から,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{\text{HA}}|^2 |\overrightarrow{\text{HM}}|^2 - (\overrightarrow{\text{HA}} \cdot \overrightarrow{\text{HM}})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{16} \times \frac{19}{12^2} - \left(\frac{7}{24}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{51}}{96} \end{aligned}$$