放物線 C 上の点 (t, at^2+2t+1) における接線の方程式は

$$y=(2at+2)(x-t)+at^2+2t+1$$
$$y=2(at+1)x-at^2+1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である。

これが原点 O を通るのは

$$-at^2+1=0$$

すなわち

$$at^2=1$$

のときであるから，O から C に 2 本の異なる接線が引ける条件は，$a>0$ である。

このとき，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ である。

$t=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ のとき，① は $y=2\left(\sqrt{a}+1\right)x$

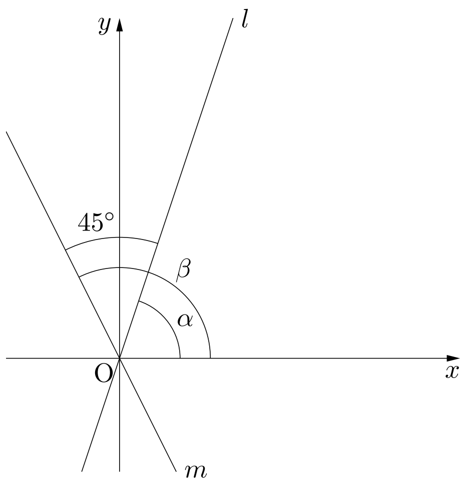
$t=-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ のとき，① は $y=2\left(-\sqrt{a}+1\right)x$

これらをそれぞれ l，m とする。

l，m が x 軸の正の方向となす角をそれぞれ α，β とすると，

$$\tan\alpha=2\left(\sqrt{a}+1\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$
$$\tan\beta=2\left(-\sqrt{a}+1\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

(1) $a \geqq 1$ のとき



$\beta-\alpha=45°$ より $\tan(\beta-\alpha)=1$ であり，これを展開して整理すると，

$$\tan\beta-\tan\alpha=1+\tan\alpha\tan\beta$$

である。

これに ②，③ を代入して整理すると

$$4a-4\sqrt{a}-5=0$$

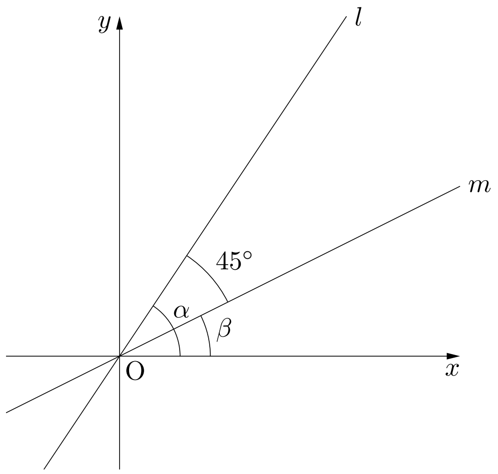
となり，$\sqrt{a} > 0$ であるから，

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{6}\right)$$

である。

よって，$a = \dfrac{1}{4}\left(7+2\sqrt{6}\right)$ である。

(2) $0 < a < 1$ のとき



$\alpha - \beta = 45°$ より $\tan(\alpha-\beta) = 1$ であり，これを展開して整理すると，

$$\tan\alpha - \tan\beta = 1 + \tan\alpha\tan\beta$$

である。

これに ②，③ を代入して整理すると

$$4a + 4\sqrt{a} - 5 = 0$$

となり，$\sqrt{a} > 0$ であるから，

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{6}\right)$$

である。

よって，$a = \dfrac{1}{4}\left(7-2\sqrt{6}\right)$ である。

(1)，(2) から求める a の値は，$a = \dfrac{1}{4}\left(7\pm2\sqrt{6}\right)$ である。