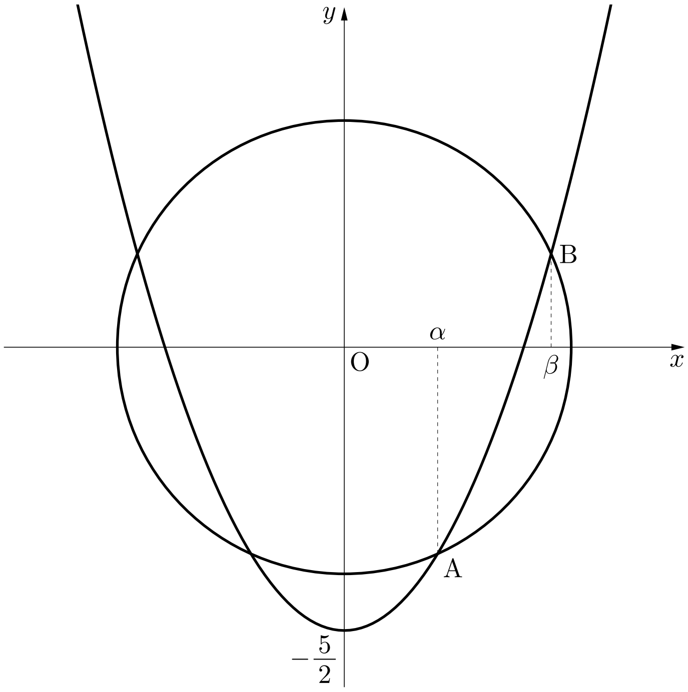

C_1 と C_2 の交点 A，B の x 座標をそれぞれ α，$\beta\,(\alpha < \beta)$ とする。

(1) C_1 と C_2 の方程式から y を消去して

$$x^2 + \left(kx^2 - \frac{5}{2}\right)^2 = 4$$

$$4k^2x^4 - 4(5k-1)x^2 + 9 = 0$$

この 4 次方程式の解が $\pm\alpha$，$\pm\beta$ であるから，X の 2 次方程式 $4k^2X^2 - 4(5k-1)X + 9 = 0$ の 2 つの解が α^2，β^2 である。

したがって，$\alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{5k-1}{k^2}$，$\alpha^2\beta^2 = \dfrac{9}{4k^2}$ となる。α，β は正であるから，$\alpha\beta = \dfrac{3}{2k}$ である。

また，直線 AB の傾きは $k(\alpha+\beta)$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2 &= \left\{1 + k^2(\alpha+\beta)^2\right\}(\beta-\alpha)^2 \\
&= \left\{1 + k^2(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)\right\}(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta) \\
&= \left\{1 + k^2\left(\frac{5k-1}{k^2} + 2\cdot\frac{3}{2k}\right)\right\}\left(\frac{5k-1}{k^2} - 2\cdot\frac{3}{2k}\right) \\
&= 8k\cdot\frac{2k-1}{k^2} \\
&= 8\left(2 - \frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

となるから，線分 AB の長さは $2\sqrt{2}\sqrt{2 - \dfrac{1}{k}}$ である。

(2) $\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき，余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos\frac{5}{6}\pi \\ &= 8 + 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

であり，これと (1) の結果から，

$$8\left(2 - \frac{1}{k}\right) = 8 + 4\sqrt{3}$$

である。

よって $k = 2\left(2 + \sqrt{3}\right)$ である。

(3) $a = 2\left(2 + \sqrt{3}\right)$ とおくと，$\alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{5a - 1}{a^2}$，$\alpha\beta = \dfrac{3}{2a}$ である。

直線 AB の方程式を $y = mx + n$ (m , n は定数) として，

$$\begin{aligned}S &= 4\pi \times \frac{5}{6}\pi \div 2\pi - \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin\frac{5}{6}\pi - \int_\alpha^\beta \left\{(mx + n) - \left(ax^2 - \frac{5}{2}\right)\right\} dx \\ &= \frac{5}{3}\pi - \sqrt{3} + a\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{5}{3}\pi - \sqrt{3} - \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3\end{aligned}$$

となる。

ここで，$(\beta - \alpha)^2 = \dfrac{2a - 1}{a^2}$ であり，$\beta - \alpha > 0$ より，$\beta - \alpha = \dfrac{1}{a}\sqrt{2a - 1}$ である。

よって

$$\begin{aligned}S &= \frac{5}{3}\pi - \sqrt{3} - \frac{a}{6} \cdot \frac{1}{a^3}\sqrt{2a - 1}^3 \\ &= \frac{5}{3}\pi - \sqrt{3} - \frac{1}{6a^2}\sqrt{2a - 1}^3 \\ &= \frac{5}{3}\pi - \sqrt{3} - \frac{1}{24\left(2 + \sqrt{3}\right)^2} \cdot \sqrt{4\left(2 + \sqrt{3}\right) - 1}^3 \\ &= \frac{5}{3}\pi - \sqrt{3} - \frac{1}{24\left(2 + \sqrt{3}\right)^2} \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)^3 \\ &= \frac{5}{3}\pi - \sqrt{3} - \frac{1}{24}\left(2 + \sqrt{3}\right) \\ &= \frac{5}{3}\pi - \frac{25}{24}\sqrt{3} - \frac{1}{12}\end{aligned}$$

である。