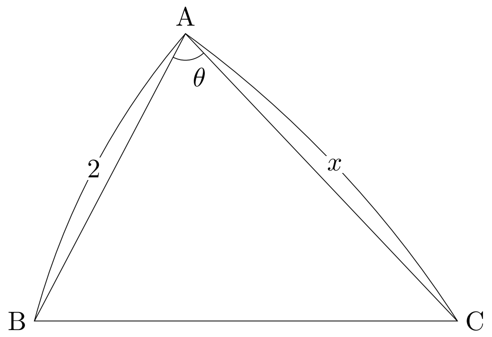


$\angle\mathrm{BAC}=\theta$，$\mathrm{CA}=x$ とおく。

面積が $\sqrt{3}$ であるから，

$$\frac{1}{2}\times 2\times x\times\sin\theta=\sqrt{3}$$

これを解いて，

$$x=\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}$$

余弦定理を用いて，

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=2^2+x^2-2\times 2\times x\times\cos\theta\\&=\frac{3}{\sin^2\theta}-4\sqrt{3}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+4\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2&=\left(\frac{3}{\sin^2\theta}-4\sqrt{3}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+4\right)+\frac{3}{\sin^2\theta}\\&=\frac{6}{\sin^2\theta}-4\sqrt{3}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+4\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{1}{\sin^2\theta}=1+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ であるから，$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=t$ とおくと，

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2&=6t^2-4\sqrt{3}t+10\\&=6\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+8\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\end{aligned}$$

(1) $0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき

$t>0$ であり，$\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$ は $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときに最小となり，そのときの値は 8 である。

このとき，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{3}$ となり，$\theta=60^\circ$ である。

(2) $90^\circ\leqq\theta<180^\circ$ のとき

$t\leqq 0$ であり，このとき①は $t$ の減少関数となるから，$\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$ は $t=0$ のとき，つまり $\theta=90^\circ$ のとき最小となり，その値は 10 である。

(1)，(2) より，求める $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさは $60^\circ$ である。