

(1)

$$\begin{aligned} |z+i| &= |z-i| \\ |z+i|^2 &= |z-i|^2 \\ (z+i)(\overline{z+i}) &= (z-i)(\overline{z-i}) \\ (z+i)(\bar{z}-i) &= (z-i)(\bar{z}+i) \\ 2iz &= 2i\bar{z} \\ z &= \bar{z} \end{aligned}$$

よって、 z は実数である。

(2)

$$(z+i)^n = (z-i)^n \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

より、

$$\begin{aligned} |(z+i)^n| &= |(z-i)^n| \\ |z+i|^n &= |z-i|^n \\ |z+i| &= |z-i| \end{aligned}$$

(1) より z は実数である。

$z+i$ を極形式を用いて表すと

$$z+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

である。ただし、 r は正の定数であり、 z は実数であるから、

$$0^\circ < \theta < 180^\circ \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} z-i &= \overline{(z+i)} \\ &= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \end{aligned}$$

となるから、 $\textcircled{1}$ は

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n\{\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\}$$

となる。よって、

$$\begin{cases} \cos n\theta = \cos(-n\theta) \\ \sin n\theta = \sin(-n\theta) \end{cases}$$

である。したがって、 k を自然数として、

$$n\theta = -n\theta + 360^\circ \times k$$

が得られるから

$$\theta = \frac{180^\circ}{n}k$$

であり、これを ② に代入して、

$$0^\circ < \frac{180^\circ}{n}k < 180^\circ$$

$$0 < k < n$$

が得られる。

つまり、 $k = 1, 2, \dots, n-1$

以上から

$$\arg(z+i) = \frac{180^\circ}{n}k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$