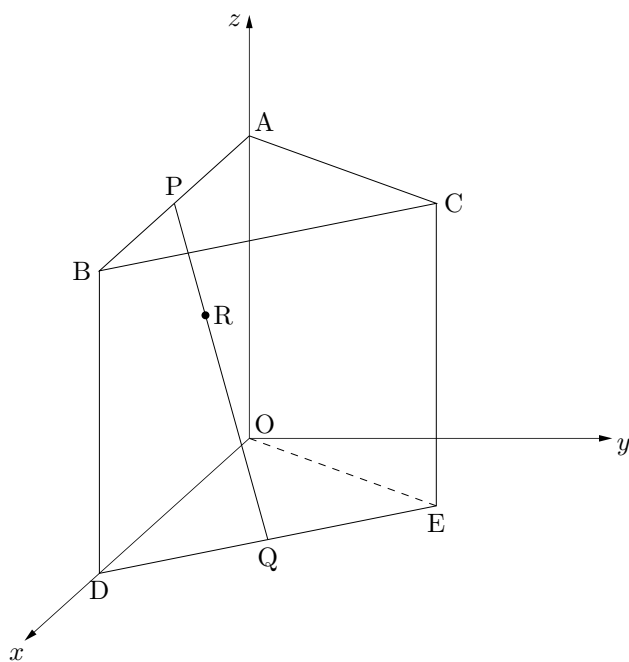




- (1) $R(X, Y, a)$ とすると, $\overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{PQ}$ (k は実数) が成り立つから,

$$\begin{pmatrix} X-t \\ Y-0 \\ a-1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1-\frac{t}{2}-t \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$$

となる。

これを解くと,

$$X = \frac{3a-1}{2}t + 1 - a$$

$$Y = \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}t$$

$$k = 1 - a$$

である。

よって $R\left(\frac{3a-1}{2}t + 1 - a, \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}t, a\right)$ である。

- (2) (1) から

$t = 0$ のとき $R(1-a, 0, a)$

$t = 1$ のとき $R\left(\frac{1+a}{2}, \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}, a\right)$

となるから, R は平面 $z = a$ 上でこの 2 点を結ぶ線分を描き, その長さは

$$\sqrt{\left(\frac{1+a}{2} - (1-a)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}\right)^2} = \sqrt{3a^2 - 3a + 1}$$

である。

P が辺 BC 上を動くときも、辺 CA 上を動くときも R はともに長さ $\sqrt{3a^2 - 3a + 1}$ の線分を描く。したがって、立体 Γ を平面 $z = a$ で切った断面は、一辺の長さが $\sqrt{3a^2 - 3a + 1}$ の正三角形となり、その面積 $S(a)$ は $\frac{\sqrt{3}}{4}(3a^2 - 3a + 1)$ である。

以上から、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(a) da \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 (3a^2 - 3a + 1) da \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

である。