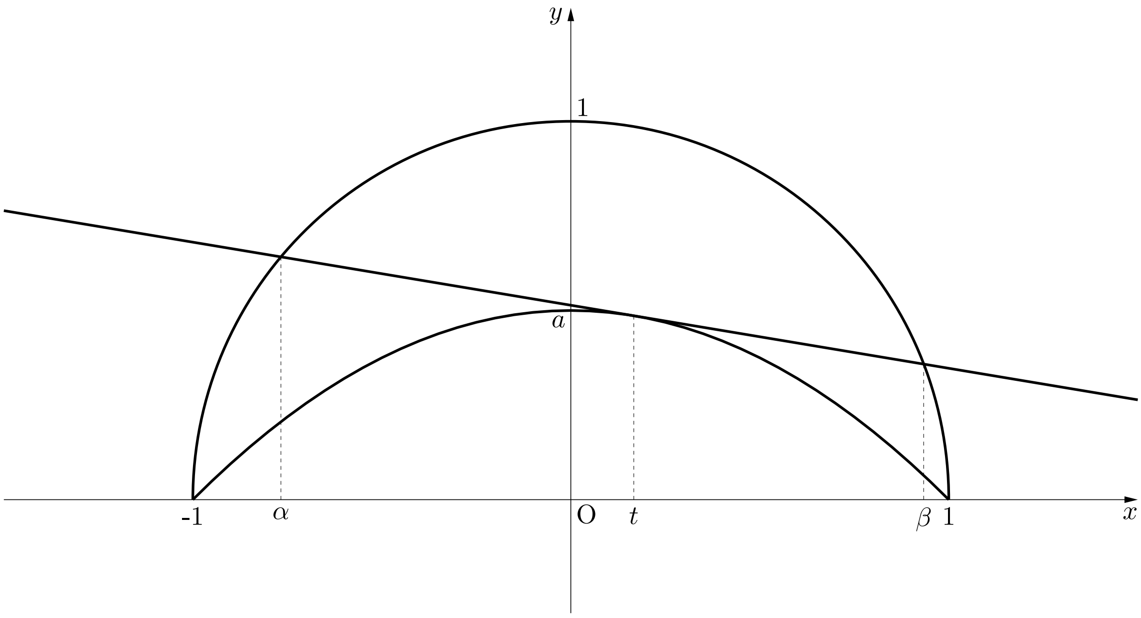

C 上の点 $(\,t\,,\,a(1-t^2)\,)$ $(|\,t\,|<1)$ における接線 l の方程式は $y=-2atx+a(t^2+1)$ である。

これと半円 D との交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，$L^2=(1+4a^2t^2)(\alpha-\beta)^2$ と表せられる。

α，β は方程式 $-2atx+a(t^2+1)=\sqrt{1-x^2}$ つまり $(4a^2t^2+1)x^2-4a^2t(t^2+1)x+a^2(t^2+1)^2-1=0$ の 2 つの異なる実数解であるから，

$$\alpha+\beta=\frac{4a^2t(t^2+1)}{4a^2t^2+1}$$

$$\alpha\beta=\frac{a^2(t^2+1)^2-1}{4a^2t^2+1}$$

である。

よって，

$$\begin{aligned}L^2&=(4a^2t^2+1)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\\&=4-\frac{4a^2(t^2+1)^2}{4a^2t^2+1}\end{aligned}$$

である。

ここで，$f(t)=\dfrac{(t^2+1)^2}{4a^2t^2+1}$ とおくと，$f'(t)=\dfrac{4t(t^2+1)(2a^2t^2-2a^2+1)}{(4a^2t^2+1)^2}$ である。

(1) $1-2a^2 \geqq 0$ つまり，$0<a \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

$-1<t<0$ では $f'(t)<0$，$0<t<1$ では $f'(t)>0$ となり，$f(t)$ は $t=0$ のとき極小で最小となり，$f(0)=1$ であるから，L は最大値 $2\sqrt{1-a^2}$ をとる。

(2) $1-2a^2<0$ つまり，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a$ のとき

$\sqrt{1-\dfrac{1}{2a^2}}$ とおくと，$f'(t)=\dfrac{4t(t^2+1)\times 2a^2(t+k)(t-k)}{(4a^2t^2+1)^2}$ となり，次の増減表が得られる。

t	-1		$-k$		0		k		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$f(t)$ は $t=\pm k$ のとき極小で最小となり，このとき $f(\pm k)=\dfrac{4a^2-1}{4a^2}$ であるから，L は最大値 $\dfrac{1}{a}$ をとる。

以上から，求める最大値は $0<a \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $2\sqrt{1-a^2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a \leqq 1$ のとき $\dfrac{1}{a}$ である。