(1) $\dfrac{dy}{d\theta}=1-\dfrac{\pi}{2}\cos\theta$，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\pi}{2}\sin\theta$ である。

よって，$-\pi<\theta<\pi$，$\theta\neq 0$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2-\pi\cos\theta}{\pi\sin\theta}$ である。

そして，$\cos\theta=\dfrac{2}{\pi}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす θ がただひとつ存在するから，それを α とすると，

$\cos\alpha=\dfrac{2}{\pi}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。

また，

$$\lim_{\theta\to-0}\frac{dy}{dx}=\lim_{\theta\to-0}\frac{2-\pi\cos\theta}{\pi\sin\theta}=+\infty$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{dy}{dx}=\lim_{\theta\to+0}\frac{2-\pi\cos\theta}{\pi\sin\theta}=-\infty$$

$$\lim_{\theta\to-\pi+0}\frac{dy}{dx}=-\infty\,,\ \lim_{\theta\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=+\infty$$

となるから，次の増減表が得られる。

$-\pi\leqq\theta\leqq 0$ のとき

θ	0		$-\alpha$		$-\dfrac{\pi}{2}$		$-\pi$
x	$1-\dfrac{\pi}{2}$		0		1		$1+\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dy}{dx}$	$(-\infty)$	$+$		$-$		$-$	$(+\infty)$
y	0	$\nearrow$			0	$\searrow$	$-\pi$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき

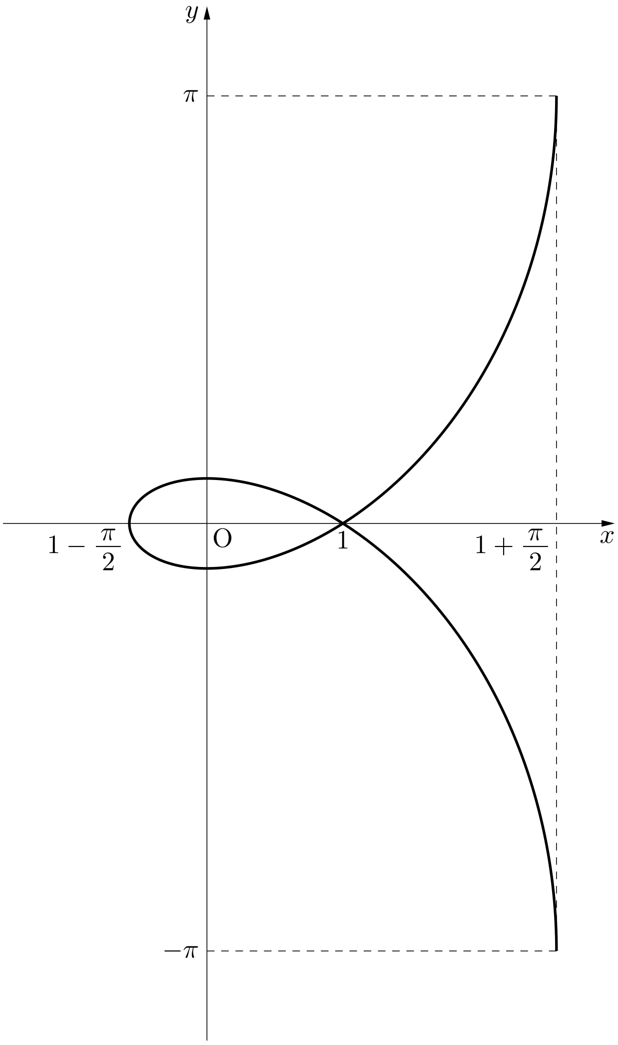
θ	0		α		$\dfrac{\pi}{2}$		π
x	$1-\dfrac{\pi}{2}$		0		1		$1+\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dy}{dx}$	$(-\infty)$	$-$	0	$+$		$+$	$(+\infty)$
y	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	π

さらに，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{\pi^2}\times\frac{\pi-2\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

であるから，$-\pi \leqq \theta \leqq 0$ では上に凸，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ では下に凸である。

以上から曲線 C の概形は次のようになる。



(2) C の $-\pi \leqq \theta \leqq 0$，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分をそれぞれ，$y = y_1$，$y = y_2$ とすると，

$$S = \int_{1-\frac{\pi}{2}}^{1} (y_1 - y_2)dx = \int_{1-\frac{\pi}{2}}^{1} y_1\,dx - \int_{1-\frac{\pi}{2}}^{1} y_2\,dx$$

となる。

そして，

$$\int_{1-\frac{\pi}{2}}^{1} y_1\,dx = \int_{0}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\sin\theta\right)\frac{\pi}{2}\sin\theta\,d\theta$$

$$\int_{1-\frac{\pi}{2}}^{1} y_2\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\sin\theta\right)\frac{\pi}{2}\sin\theta\,d\theta = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\sin\theta\right)\frac{\pi}{2}\sin\theta\,d\theta$$

である。

よって

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\sin\theta\right)\frac{\pi}{2}\sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\theta\sin\theta - \frac{\pi}{2}\sin^2\theta\right)\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\left[-\theta\cos\theta + \sin\theta - \frac{\pi}{4}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{8}\left(\pi^2 - 8\right)
\end{aligned}$$

である。