

(1)

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{3n}}{x^3 + 1} dx - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{x^3 + 1} dx \\ &= (-1)^n \left\{ \int_0^1 \frac{x^{3n}}{x^3 + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{x^3 + 1} dx \right\} \\ &= (-1)^n \int_0^1 \frac{(x^3 + 1)x^{3n}}{x^3 + 1} dx \\ &= (-1)^n \int_0^1 x^{3n} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{3n + 1} \end{aligned}$$

(2)

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3k + 1} = \sum_{k=0}^n (I_k - I_{k+1}) = I_0 - I_{n+1}$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^3 + 1} dx \text{ について}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + 1} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{-x + 2}{x^2 - x + 1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{6} \times \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

であるから,

$$I_0 = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{x + 1} dx - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$$

となり,

$$\int_0^1 \frac{1}{x + 1} dx = \left[\log |x + 1| \right]_0^1 = \log 2$$

$$\int_0^1 \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx = \left[\log |x^2 - x + 1| \right]_0^1 = 0$$

である。また、 $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} \end{aligned}$$

である。

よって、 $I_0 = \frac{1}{3} \log 2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi$ である。

次に、 I_n について、

$0 \leq x \leq 1$ では

$$0 \leq \frac{x^{3n}}{x^3 + 1} \leq x^{3n}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} \int_0^1 0 dx &< \int_0^1 \frac{x^{3n}}{x^3 + 1} dx < \int_0^1 x^{3n} dx \\ 0 &< (-1)^n I_n < \frac{1}{3n + 1} \end{aligned}$$

が成り立つ。

よって、 $0 < |I_n| < \frac{1}{3n + 1}$ が成り立って、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n + 1} = 0$ であるから、はさみうちの原理により、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$ である。

したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+1} = 0$ である。

以上より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3k + 1} = \frac{1}{3} \log 2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi$$

が成り立つから、無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n + 1}$ の和は存在して、その値は $\frac{1}{3} \log 2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi$ である。