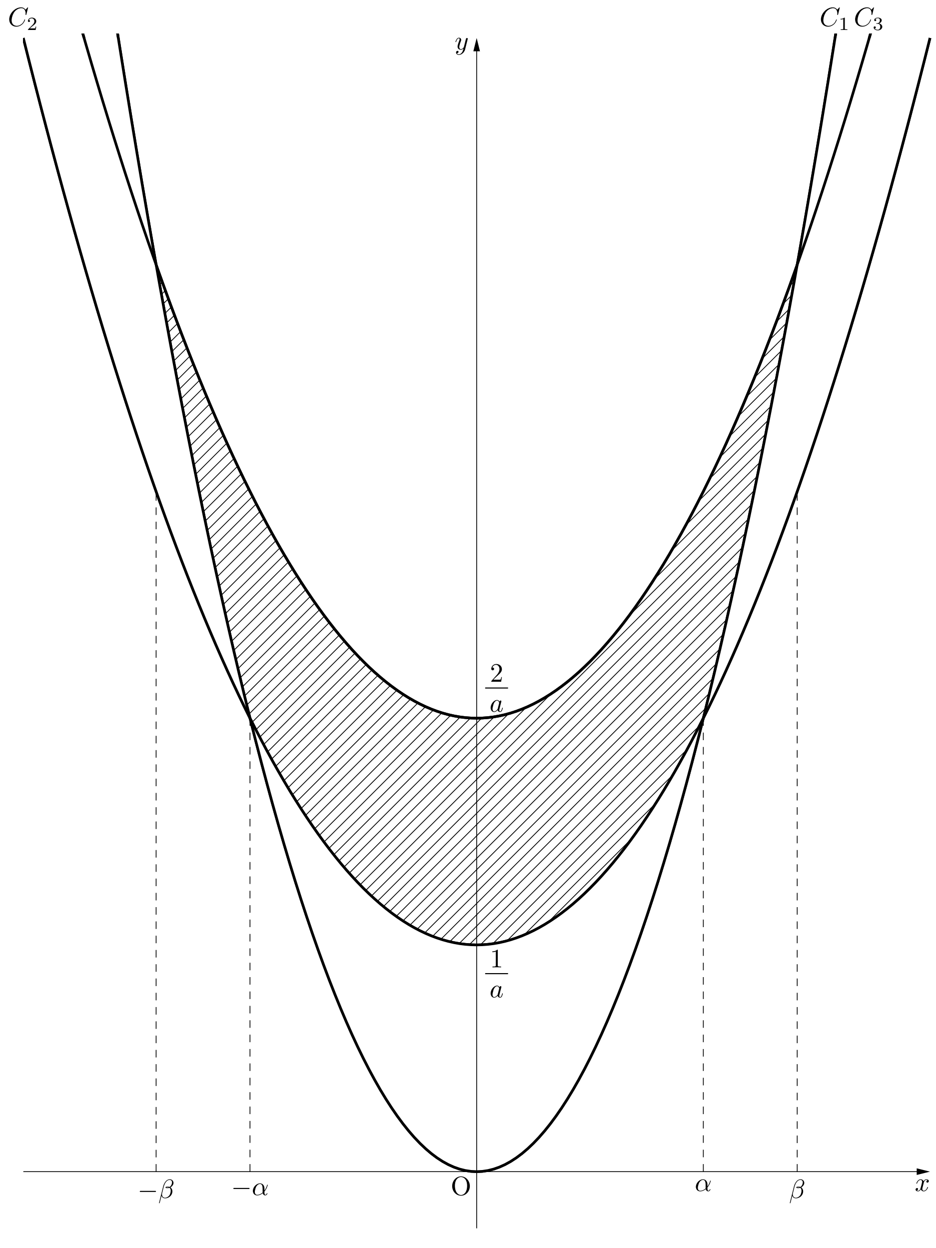
C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\pm\dfrac{1}{\sqrt{a(1-a)}}$，$C_1$ と C_3 の交点の x 座標は $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a(1-a)}}$ であるから，$\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a(1-a)}}$，$\beta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a(1-a)}}$ とおくと，$\beta=\sqrt{2}\alpha$ である。



$$\begin{aligned}ax^2+\frac{1}{a}-x^2&=-(1-a)(x^2-\alpha^2)\\&=-(1-a)(x+\alpha)(x-\alpha)\end{aligned}$$

同様にして，$ax^2+\dfrac{2}{a}-x^2=-(1-a)(x+\beta)(x-\beta)$ である。
よって，

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-\beta}^{\beta}\left\{\left(ax^2+\frac{2}{a}\right)-x^2\right\}dx-\int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{\left(ax^2+\frac{1}{a}\right)-x^2\right\}dx\\
&=-(1-a)\int_{-\beta}^{\beta}(x+\beta)(x-\beta)dx+(1-a)\int_{-\alpha}^{\alpha}(x+\alpha)(x-\alpha)dx\\
&=\frac{1-a}{6}(8\beta^3-8\alpha^3)\\
&=\frac{4}{3}(1-a)\left(2\sqrt{2}-1\right)\alpha^3\\
&=\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)(1-a)\frac{1}{\sqrt{\alpha^3(1-a)^3}}\\
&=\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\frac{1}{\sqrt{\alpha^3(1-a)}}
\end{aligned}$$

ここで，$f(a)=a^3(1-a)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
f'(a)&=3a^2-4a^3\\
&=4a^2\left(\frac{3}{4}-a\right)
\end{aligned}$$

となるから，$0<a<\dfrac{3}{4}$ では $f'(a)>0$ となり，$f(a)$ は増加し，$\dfrac{3}{4}<a<1$ では $f'(a)<0$ となり，$f(a)$ は減少する。
したがって，S は $a=\dfrac{3}{4}$ のとき最小となり，その値は $\dfrac{64}{27}\left(2\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$ である。