$$\alpha^2+\beta^2 \leqq 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$
$$a \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$
$$\alpha+\beta=x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$
$$\alpha\beta=y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

とおくと，① は

$$x^2-2y \leqq 1$$

となる。

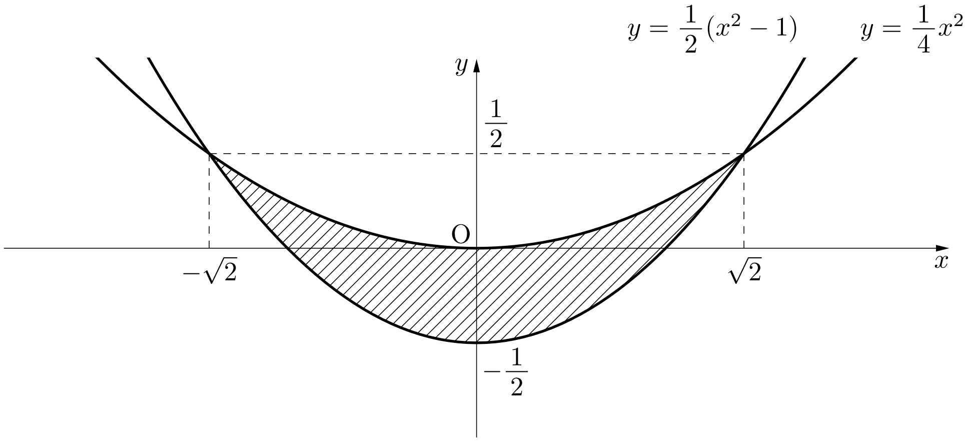
α，β は実数であるから

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \geqq 0$$

これに ③，④ を代入して

$$x^2-4y \geqq 0$$

よって，点 $(x\,,\,y)$ は放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ と放物線 $y=\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ で囲まれた領域の内部と周上を動く。この領域を D とする。



$(a-\alpha)(a-\beta)=k$ とおき，③，④ を代入して，x，y で表すと，

$$y=ax+k-\alpha^2$$

となり，これを直線 l とする。この直線 l が D と共有点をもつときの k の最小値が求めるものである。

D 上の点 $\left(\sqrt{2},\,\dfrac{1}{2}\right)$ における $y=\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ の接線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

(1) $0 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

直線 l と放物線 $y=\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ は，$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ において接するから，このとき，k は最小となる。つまり，

$$\frac{1}{2}(x^2-1)=ax+k-a^2$$

$$x^2-2ax+2a^2-2k-1=0$$

は重解をもつ。

$a^2-(2a^2-2k-1)=0$ より，$k=\dfrac{1}{2}(a^2-1)$ である。

(2) $a \geqq \sqrt{2}$ のとき

直線 l が D 上の点 $\left(\sqrt{2},\, \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき，k は最小となり，最小値は

$$a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2} = \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

となる。

以上から，求める最小値は

$0 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき　$\dfrac{1}{2}(a^2 - 1)$

$a \geqq \sqrt{2}$ のとき　$\left(a - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

である。