

- (1) 2枚のカードの番号を x, y ($x < y$) とすると,

$$x + y > n \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$1 \leq x < y \leq n \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

- (a) n が奇数のとき, m を自然数として $n = 2m + 1$ とおく. k を 1 から m までの自然数とする。

$x = k$ のとき

①, ②から $2m + 1 - k < y \leq 2m + 1$ であり, これを満たす整数 y は k 個ある。

$x \geq m + 1$ のとき

x, y は, $m + 1$ から $2m + 1$ までの $m + 1$ 個から 2 個を選べばよい。

よって,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{{}_{2m+1}C_2} (1 + 2 + \dots + m + {}_{m+1}C_2) \\ &= \frac{2}{(2m+1) \cdot 2m} \left\{ \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m+1)m}{2} \right\} \\ &= \frac{m+1}{2m+1} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

- (b) n が偶数のとき, m を自然数として $n = 2m$ とおく. k を 1 から m までの自然数とする。

$x = k$ のとき

①, ②から $2m - k < y \leq 2m$ であり, これを満たす整数 y は k 個ある。

$x \geq m + 1$ のとき

x, y は, $m + 1$ から $2m$ までの m 個から 2 個を選べばよい。

よって,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{{}_{2m}C_2} (1 + 2 + \dots + m + {}_mC_2) \\ &= \frac{1}{m(2m-1)} \left\{ \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} \right\} \\ &= \frac{m}{2m-1} \\ &= \frac{n}{2(n-1)} \end{aligned}$$

- (2) 2枚のカードの番号を x, y ($x \leq y$) とすると,

$$x + y > n \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$1 \leq x \leq y \leq n \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

- (a) n が奇数のとき, m を自然数として $n = 2m + 1$ とおく. k を 1 から m までの自然数とする。

$x = k$ のとき

③, ④から $2m + 1 - k < y \leq 2m + 1$ であり, これを満たす整数 y は k 個ある。

$x \geq m + 1$ のとき

x, y は, $m+1$ から $2m+1$ までの $m+1$ 個から 2 個を選ばばよい。

同じ番号のカードは赤, 白の 2 種類あることを考えて

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2(2m+1)C_2} \{2 \times 2(1+2+\cdots+m) + 2(m+1)C_2\} \\ &= \frac{1}{(2m+1)(4m+1)} \{2m(m+1) + (m+1)(2m+1)\} \\ &= \frac{m+1}{2m+1} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

(b) n が偶数のとき, m を自然数として $n=2m$ とおく。 k を 1 から m までの自然数とする。

$x=k$ のとき

③, ④から $2m-k < y \leq 2m$ であり, これを満たす整数 y は k 個ある。

$x \geq m+1$ のとき

x, y は, $m+1$ から $2m$ までの m 個から 2 個を選ばばよい。

同じ番号のカードは赤, 白の 2 種類あることを考えて

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2 \cdot 2m C_2} \{2 \times 2(1+2+\cdots+m) + 2m C_2\} \\ &= \frac{1}{2m(4m-1)} \{2m(m+1) + 2m(2m-1)\} \\ &= \frac{4m+1}{2(4m-1)} \\ &= \frac{2n+1}{2(2n-1)} \end{aligned}$$