$(x+y)(x+3y)=p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

(1)　①に $p=140$ を代入すると，

$$(x+y)(x+3y)=140=2^2\times5\times7 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である。

$x+3y-(x+y)=2y$ で $2y$ は偶数であるから，$x+y$ と $x+3y$ はともに偶数か，ともに奇数となる。$x+y<x+3y$ であり，②から $(x+y\,,\,x+3y)=(2\,,\,70)\,,\,(10\,,\,14)$ が得られる。

x，y がともに正の整数であることに注意して x，y を求めると，$x=8$，$y=2$ である。

(2)　① に $p=4$ を代入すると，

$$(x+y)(x+3y)=4$$
$$x^2+4xy+3y^2=4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

である。

$3x+2y=k$ とおくと，

$$y=\frac{1}{2}(k-3x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

$x>0$，$y>0$ は，④かつ

$$0<y<\frac{k}{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

と同値である。

④を③ に代入して整理すると

$$7x^2-10kx+3k^2-16=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

である。⑥ の左辺を $f(x)$ とおくと，

$$f(x)=7\left(x-\frac{5}{7}k\right)^2-\frac{4}{7}k^2-16$$

したがって，x の 2 次方程式⑥が⑤を満たす解をもつ。その条件は，$k>0$ に着目して

$$f\left(\tfrac{k}{3}\right)<0<f(0)$$

となる。

以上より，$3x+2y$ のとる値の範囲は $\dfrac{4}{\sqrt{3}}<3x+2y<6$ である。