(1) $z = \dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと，$|\alpha| = 1$，$|\beta| = 2$ より，

$$\begin{aligned}|z| &= \frac{|\beta|}{|\alpha|}\\ &= 2\end{aligned}$$

となるので，

$$z\bar{z} = 4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。

また，$|\alpha + \beta| = \sqrt{3}$ より，

$$\left|\alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right| = \sqrt{3}$$
$$|\alpha||1 + z| = \sqrt{3}$$
$$|1 + z| = \sqrt{3}$$
$$(1 + z)(1 + \bar{z}) = 3$$
$$1 + z + \bar{z} + z\bar{z} = 3$$

となり，① を代入すると，

$$z + \bar{z} = -2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。①，② から $\bar{z}$ を消去して

$$z^2 + 2z + 4 = 0$$

である。

以上から，$z = \dfrac{\beta}{\alpha} = -1 \pm \sqrt{3}i$（以下，複合同順とする）である。

(2)

$$\begin{aligned}|\alpha^n - \beta^n| &= |\alpha^n|\left|1 - \frac{\beta^n}{\alpha^n}\right|\\ &= |\alpha^n||1 - z^n|\\ &= |z^n - 1|\end{aligned}$$

(1) より，$z^3 = 2^3$ が成り立つ。

m を 0 以上の整数とする。

（ア）$n = 3m + 1$ のとき

$$\begin{aligned}z^n &= z^{3m+1}\\ &= (z^3)^m \times z\\ &= (2^3)^m\left(-1 \pm \sqrt{3}i\right)\\ &= 2^{n-1}\left(-1 \pm \sqrt{3}i\right)\end{aligned}$$

である。

よって，

$$
\begin{aligned}
|\,\alpha^n-\beta^n\,| &= \left|-2^{n-1}-1\pm 2^{n-1}\sqrt{3}i\right| \\
&= \sqrt{(2^{n-1}+1)^2+\left(2^{n-1}\sqrt{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{4^n+2^n+1}
\end{aligned}
$$

である。

（イ）$n=3m+2$ のとき

$$
\begin{aligned}
z^n &= (z^3)^m\times z^2 \\
&= 2^{3m}\left(-2\mp 2\sqrt{3}i\right) \\
&= 2^{n-1}\left(-1\mp\sqrt{3}i\right)
\end{aligned}
$$

である。

よって，

$$
\begin{aligned}
|\,\alpha^n-\beta^n\,| &= \left|-2^{n-1}-1\mp 2^{n-1}\sqrt{3}i\right| \\
&= \sqrt{4^n+2^n+1}
\end{aligned}
$$

である。

（ウ）$n=3m+3$ のとき

$$
\begin{aligned}
z^n &= (z^3)^m\times z^3 \\
&= 2^{3m+3} \\
&= 2^n
\end{aligned}
$$

である。

よって，

$$
\begin{aligned}
|\,\alpha^n-\beta^n\,| &= |\,2^n-1\,| \\
&= 2^n-1
\end{aligned}
$$

である。

以上から，$|\,\alpha^n-\beta^n\,|$ の値は，

2^n-1（n が 3 の倍数のとき）

$\sqrt{4^n+2^n+1}$（n が 3 の倍数でないとき）

である。