(1)　だ円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の焦点の座標は $\left(\pm\sqrt{3}\,,\,0\right)$ である。

したがって，C の焦点の座標は $\left(\pm\sqrt{3}-\sqrt{3}\,,\,0\right)$

つまり，$(\,0\,,\,0\,)$ と $\left(-2\sqrt{3}\,,\,0\right)$ である。

　また，離心率は $2e=\sqrt{4-1}$ より，$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

(2)　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を C の方程式に代入すると，

$$\left(r\cos\theta+\sqrt{3}\right)^2+4r^2\sin^2\theta=4$$

となり，これを整理すると

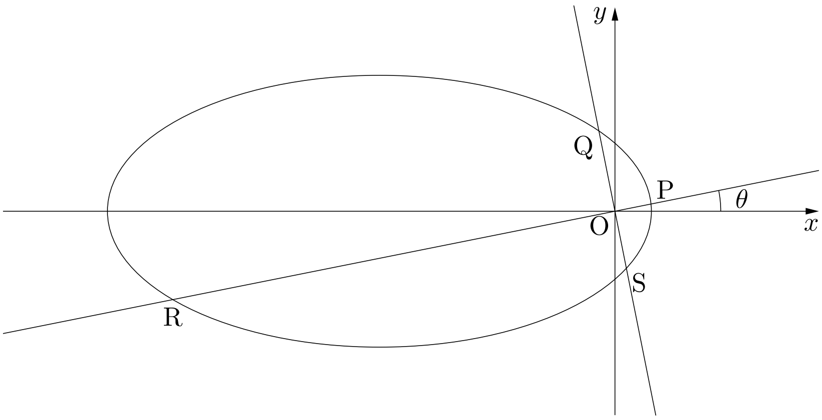
$$\left\{\left(2+\sqrt{3}\cos\theta\right)r-1\right\}\left\{\left(2-\sqrt{3}\cos\theta\right)r+1\right\}=0$$

となる。

　ここで，$\left(2-\sqrt{3}\cos\theta\right)r+1>0$ であるから，$\left(2+\sqrt{3}\cos\theta\right)r-1=0$ である。

　したがって，極方程式は $r=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$ である。

(3)　$\mathrm{OP}=r_1$，$\mathrm{OQ}=r_2$，$\mathrm{OR}=r_3$，$\mathrm{OS}=r_4$ とおく。



　$\mathrm{P}\,(\,r_1\,,\,\theta\,)$ とおくと，(2) から

$$r_1=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$$

$$r_2=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=\frac{1}{2-\sqrt{3}\sin\theta}$$

$$r_3=\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\left(\theta+\pi\right)}$$
$$=\frac{1}{2-\sqrt{3}\cos\theta}$$

$$
\begin{aligned}
r_4 &= \frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)} \\
&= \frac{1}{2+\sqrt{3}\sin\theta}
\end{aligned}
$$

となる。

　したがって，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}+\frac{1}{\mathrm{OR}^2}+\frac{1}{\mathrm{OS}^2} &= \frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{{r_4}^2} \\
&= \left(2+\sqrt{3}\cos\theta\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\sin\theta\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\cos\theta\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\sin\theta\right)^2 \\
&= 22
\end{aligned}
$$

となり，$\dfrac{1}{\mathrm{OP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OR}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OS}^2}$ の値は常に一定値 22 である。