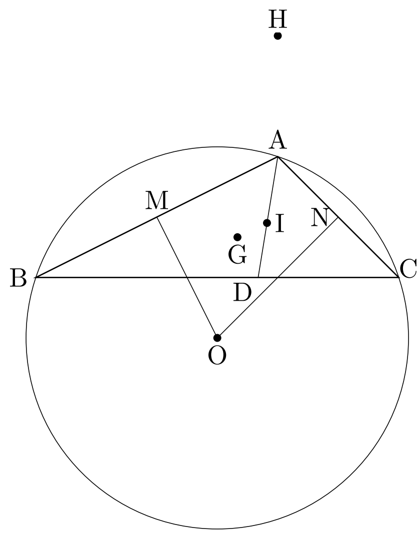
(1)　$\angle$BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，BD : DC = BA : AC = 5 : 3 であるから，

$$\mathrm{BD} = \frac{5}{5+3} \times 7 = \frac{35}{8}$$

である。



同様にして，

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = \mathrm{AB} : \mathrm{BD} = 5 : \frac{35}{8} = 8 : 7$$

である。

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}} &= \frac{8}{15}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \frac{8}{15} \times \frac{1}{8}\left(3\vec{b} + 5\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{IG}} &= \overrightarrow{\mathrm{AG}} - \overrightarrow{\mathrm{AI}} \\ &= \frac{2}{15}\vec{b} \\ &= \frac{2}{15}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

である。

以上より，

$$\begin{aligned}\mathrm{IG} &= \frac{2}{15}\mathrm{AB} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

である。

(2)　$\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\dfrac{1}{2}$ であるから，

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \left|\vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| \cos\angle\mathrm{BAC} = -\frac{15}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である。また，

$$\left|\vec{b}\right| = 5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

$$\left|\vec{c}\right| = 3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

である。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ は，p，q を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = p\vec{b} + q\vec{c}$ と表される。

AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= -p\vec{b} - q\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ &= \left(-p + \frac{1}{2}\right)\vec{b} - q\vec{c}\end{aligned}$$

となり，同様にして，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = -p\vec{b} + \left(-q + \frac{1}{2}\right)\vec{c}$$

となる。

ここで，OM ⊥ AB であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \vec{b} = 0$ であり，

$$\left(-p + \frac{1}{2}\right)\left|\vec{b}\right|^2 - q\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

が成り立つ。

これを ①，②, ③ を用いて計算すると，

$$-10p + 3q + 5 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

となる。

　また，ON ⊥ AC であるから，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \vec{c} = 0$ であり，同様にして

$$5p - 6q + 3 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

となる。

　④，⑤ を解くと，$p = \dfrac{13}{15}$，$q = \dfrac{11}{9}$ である。

　したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \frac{13}{15}\vec{b} + \frac{11}{9}\vec{c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

である。

　次に，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は，m，n を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = m\vec{b} + n\vec{c}$ と表される。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BH}} &= \overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (m-1)\vec{b} + n\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}} &= \overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= m\vec{b} + (n-1)\vec{c}\end{aligned}$$

である。

　そして，BH ⊥ AC であるから，$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \vec{c} = 0$ であり，

$$(m-1)\vec{b} \cdot \vec{c} + n\left|\vec{c}\right|^2 = 0$$

が成り立つ。

　これを解いて，

$$5m - 6n - 5 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

となる。

　CH ⊥ AB であるから，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \vec{b} = 0$ であり，同様にして

$$10m - 3n + 3 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

となる。

　⑦，⑧ を解くと，$m = -\dfrac{11}{15}$，$n = -\dfrac{13}{9}$ である。

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = -\frac{11}{15}\vec{b} - \frac{13}{9}\vec{c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑨}$$

である。

以上から，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ と ⑥，⑨ を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} - \overrightarrow{\mathrm{AO}} = -8\left(\frac{1}{15}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AO}} = -24\left(\frac{1}{15}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c}\right)$$

であるので，

$$\mathrm{OG} : \mathrm{OH} = 8 : 24 = 1 : 3$$

である。