(1) OA，OB が x 軸の正の方向となす角を，それぞれ α，β とすると

$$\tan\alpha = 3a$$

$$\tan\beta = 3b$$

$$\angle\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3} = \beta - \alpha$$

である。

よって，

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{3} &= \tan(\beta-\alpha) \\
\sqrt{3} &= \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} \\
&= \frac{3(b-a)}{1+9ab} \\
&= -\frac{3t}{1+9ab} \\
ab &= -\frac{1}{9}\left(\sqrt{3}t+1\right) \\
-ab &= \frac{1}{9}\left(\sqrt{3}t+1\right)
\end{aligned}$$

となる。

以上から，a と $-b$ は z の 2 次方程式

$$z^2 - tz + \frac{1}{9}\left(\sqrt{3}+1\right) = 0$$

の 2 つの正の解となる。このとき，2 次方程式の判別式を D とすると $D \geqq 0$ が成り立つ。また，解と係数の関係から $t>0$，$\frac{1}{9}\left(\sqrt{3}+1\right) > 0$ が成り立つ。

これらから求める t のとる値の範囲は $t \geqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ である。

(2) 直線 AB の傾きは $3(a+b)$ であるから，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{1+9(a+b)^2}(a-b)$$

である。

これを t を使って表すと，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{9t^4 - 4\sqrt{3}t^3 - 3t^2}$$

となる。

ここで，$f(t) = 9t^4 - 4\sqrt{3}t^3 - 3t^2$ とおくと，

$$f'(t) = 6t\left(6t^2 - 2\sqrt{3}t - 1\right)$$

$t \geqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき，$6t^2 - 2\sqrt{3}t - 1 = 6\left(t - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - \frac{3}{2}$ は増加関数となり，$t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 3 をとるから，$f'(t) > 0$ となって，$f(t)$ は t の増加関数となる。

このとき，$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{3}$ であるから，AB の長さは最小値 $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ をとる。

また，$D=0$ であるかから，$a = -b = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$，つまり，$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$，$b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。

以上から，AB の長さの最小値は，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ であり，このとき，$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$，$b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。