(1) 4 人でじゃんけんを行って，勝者が現れるのは 4 人ともグー，チョキ，パーのうちの 2 種類を出し，かつ，4 人とも同じでないときであり，そのような出し方は ${}_3\mathrm{C}_2 \times \left(2^4 - 2\right)$ 通りであるから，余事象の確率より，

$$p_4 = 1 - \frac{{}_3\mathrm{C}_2 \times \left(2^4 - 2\right)}{3^4}$$
$$= \frac{13}{27}$$

である。

(2) (1) と全く同様に考えて，

$$p_n = 1 - \frac{{}_3\mathrm{C}_2 \times (2^n - 2)}{3^n}$$
$$= \frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}}$$

である。

(3) $p_n \geqq \dfrac{9}{10}$ より

$$3^{n-1} \geqq 10\,(2^n - 2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

となる。

$n = 2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\,,\,7\,,\,8$ のとき，① は成り立たない。

$n = 9$ のとき，$3^8 = 6561$，$10(2^8 - 2) = 5100$ となり，① は成り立つ。

$n \geqq 9$ のとき，① が常に成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

$n = 9$ のとき，上に示したとおり，① は成り立つ。

k を 9 以上の自然数として，$n \geqq k$ のとき，① が成り立つと仮定すると，

$$3^{k-1} \geqq 10\,(2\ k - 2)$$

であり，両辺に 3 をかけると，

$$3^k \geqq 30\left(2^k - 2\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

となる。

ここで，$30\left(2^k - 2\right)$ と $10\left(2^{k+1} - 2\right)$ を比較する。

$$30\left(2^k - 2\right) - 10\left(2^{k+1} - 2\right) = 10\left(2^k - 4\right) > 0$$

より，

$$30\left(2^k - 2\right) > 10\left(2^{k+1} - 2\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

である。

② と ③ から，

$$3^k > 10\left(2^{k+1} - 2\right)$$

となり，①は $n = k + 1$ のときも成り立つ。

以上から，$n \geqq 9$ のとき，① は成り立つ。

したがって，求める n の範囲は，$n \geqq 9$ である。