

$O(0, 0)$  を原点とする  $xy$  平面上に  $f(x) = (x-n)(3n-x)$  で表される放物線  $y = f(x)$  がある。ただし、 $n$  は自然数とする。

(1) 不等式  $0 \leq y \leq f(x)$  を満たす格子点  $(x, y)$  の個数  $a_n$  を  $n$  を用いて表せ。

(2) 不等式  $0 \leq y \leq \frac{1}{n^5} f(x)$  で表される図形を  $y$  軸の周りに一回転してできる立体の体積を  $V_n$  とする。

$V = V_{2n+1} + V_{2n+2} + \cdots + V_{4n}$  として、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} V$  を求めよ。