(1) $0 \leqq y \leqq f(x)$ を満たす格子点 $(x\,,\,y)$ のうち，直線 $x=k\,(\,k=n\,,\,n+1\,,\cdots,3n\,)$ 上にあるものは，y 座標が 0 から $f(x)$ までの $f(k)+1$ 個，つまり $-k^2+4nk-3n^2+1$ 個だけである。

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=n}^{3n}\left(-k^2+4nk-3n^2+1\right) \\ &= \sum_{k=1}^{3n}\left(-k^2\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(-k^2\right)+4n\left(\sum_{k=1}^{3n}k-\sum_{k=1}^{n-1}k\right)+(2n+1)(-3n^2+1) \\ &= \frac{1}{3}(4n^2+5n+3) \end{aligned}$$

となる。

これは，$n=1$ のときも含められる。

以上から，

$$a_n = \frac{1}{3}(4n^2+5n+3)$$

である。

(2) $y=\dfrac{1}{n^5}f(x)$ を x について解いて，

$$x=n\left(2\pm\sqrt{1-n^3y}\right)\quad\left(0\leqq y\leqq\frac{1}{n^3}\right)$$

$\dfrac{1}{n^3}=p$ とおくと，

$$x=n\left(2\pm\sqrt{1-\frac{y}{p}}\right)$$

となるから，

$$\begin{aligned} V_n &= \pi\int_0^p n^2\left\{\left(2+\sqrt{1-\frac{y}{p}}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-\frac{y}{p}}\right)^2\right\}dy \\ &= \frac{16\pi}{3n} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} V &= V_{2n+1}+V_{2n+2}+\cdots+V_{4n-1}+V_{4n} \\ &= \frac{16\pi}{3}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\right) \\ &= \frac{16\pi}{3}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n+k} \\ &= \frac{16\pi}{3}\cdot\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2n}{2n+k} \\ &= \frac{16\pi}{3}\cdot\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{2n}} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} V &= \frac{16\pi}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \\ &= \frac{16\pi}{3}\left[\log|1+x|\right]_0^1 \\ &= \frac{16\pi}{3}\log 2\end{aligned}$$

である。