(1)

$$\begin{aligned}(1+\cos\theta+i\sin\theta)^2&=(1+\cos\theta)^2-\sin^2\theta+2\sin\theta\,(1+\cos\theta)\,i\\&=2\cos\theta\,(1+\cos\theta)+2\sin\theta\,(1+\cos\theta)\,i\end{aligned}$$

よって，$x=f\left(\theta\right)=2\cos\left(1+\cos\theta\right)$，$y=g\left(\theta\right)=2\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)$ である。

したがって，$f'\left(\theta\right)=-2\sin\theta\left(2\cos\theta+1\right)$，$g'\left(\theta\right)=2\left(2\cos\theta-1\right)\left(1+\cos\theta\right)$ となるから，

$f\left(\theta\right)$，$g\left(\theta\right)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0		$\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{2}{3}\pi$		π
$f'(\theta)$		$-$		$-$		$+$	
$f(\theta)$	4	$\searrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	0

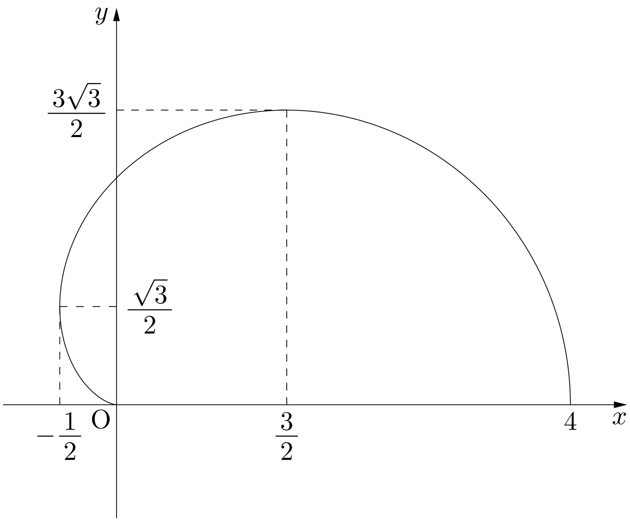
θ	0		$\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{2}{3}\pi$		π
$g'(\theta)$		$+$		$-$		$-$	
$g(\theta)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

また，

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to+0}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\theta\to+0}\frac{-(2\cos\theta-1)(1+\cos\theta)}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\\&=-\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{-(2\cos\theta-1)(1+\cos\theta)}{\sin\theta(2\cos\theta+1)}\\&=-\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\\&=0\end{aligned}$$

となるから，C の概形は図のようになる。



(2) C のうち，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ の部分を $x_1 = x_1(y)$，$\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \pi$ の部分を $x_2 = x_2(y)$ とすると，

$$S = \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \{x_1(y) - x_2(y)\}\, dy$$

である。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} x_1(y)\, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cos\theta(1+\cos\theta)\cdot 2(2\cos\theta - 1)(1+\cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\cos\theta(1+\cos\theta)(2cos\theta - 1)(1+\cos\theta)\, d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} x_2(y)\, dy &= -\int_\pi^{\frac{\pi}{3}} 2\cos\theta(1+\cos\theta)\cdot 2(2\cos\theta - 1)(1+\cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 4\cos\theta(1+cos\theta)(2\cos\theta - 1)(1+\cos\theta)\, d\theta\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\pi} 4\cos\theta(1+\cos\theta)(2\cos\theta - 1)(1+\cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (8\cos^4\theta + 12\cos^3\theta - 4\cos\theta)\, d\theta\end{aligned}$$

ここで，$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = 0$，$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 0$ であるので，$S = \int_0^{\pi} 8\cos^4\theta\, d\theta$ となる。

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\pi} 8\cos^4\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 8\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (2 + 4\cos 2\theta + 1 + \cos 4\theta)\, d\theta \\ &= \left[3\theta + 2\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\pi} \\ &= 3\pi\end{aligned}$$