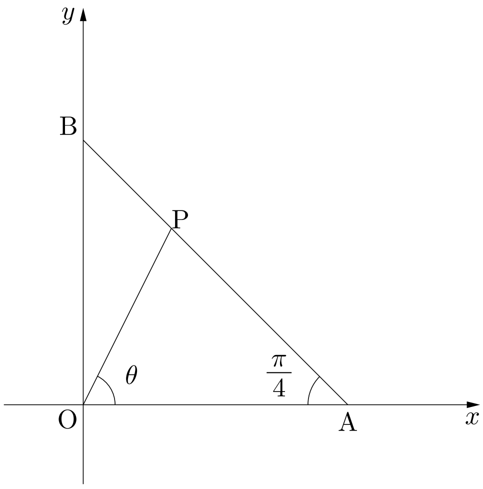

(1) 正弦定理より，

$$\frac{r}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sin\left\{\pi - \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right\}}$$
$$r = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

である。

よって，

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,d\theta$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}\,d\theta$$

となる。

ここで，$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\,d\theta = -dt$ である。

したがって，

$$\int \frac{1}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}\,d\theta = \int \frac{1}{\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\,d\theta$$
$$= -\int \frac{1}{1-t^2}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\log|1-t| - \log|1+t|\right) + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

そして，

θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\longrightarrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

であるので

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log|1-t|-\log|1+t|\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\\ &= \sqrt{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)\end{aligned}$$

である。

(2) (1) より

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

であるから

$$\begin{aligned}\beta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\theta\,d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\cos\theta\,d\theta\end{aligned}$$

となる。

ここで，$\frac{\pi}{2}-\theta=\varphi$ とおくと，$d\theta=-d\varphi$ である。

そして，

θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
φ	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	$\longrightarrow$	0

であるので，

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi-\varphi\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cdot(-1)\,d\varphi\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\left\{\pi-\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right\}}\sin\varphi\,d\varphi\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\varphi\,d\varphi\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\sin\varphi\,d\varphi\\ &= \gamma\end{aligned}$$

となり，$\beta=\gamma$ が示された。

$$\begin{aligned}
\beta+\gamma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\left(\cos\theta+\sin\theta\right)\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\,d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\,d\theta \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

である。

また，$\beta+\gamma=2\beta$ である。よって，$\beta=\dfrac{\alpha}{2}$ である。

したがって，

$$\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

である。