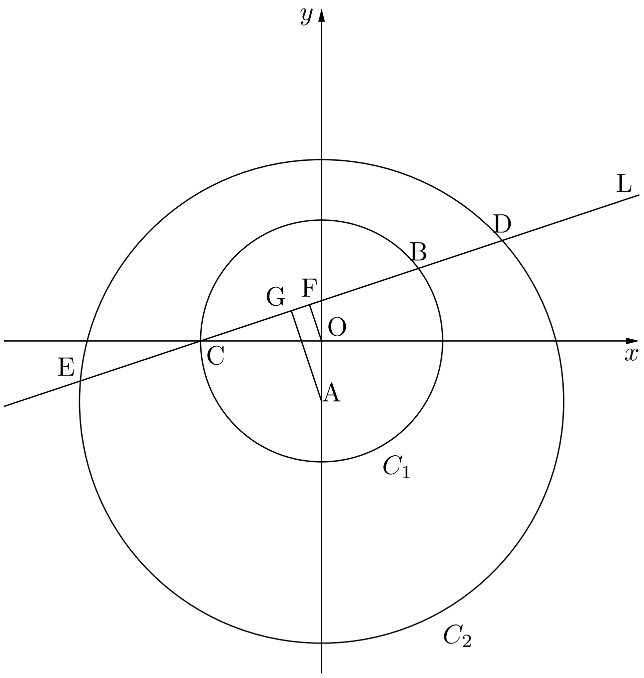
L と C_1 との交点，C_2 との交点を図のようにそれぞれ，B，C，D，E とする。また，O，A から L へ下ろした垂線をそれぞれ OF，AG とする。さらに，$\angle \mathrm{OAG} = \theta$ とする。

このとき，対称性から $0 \leqq \theta \leqq \pi$ で考えればよい。



(1) L のうち，Σ に含まれる部分の長さを M とする。

(a) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

O から AG に下ろした垂線を OH とすると，

$$M = \mathrm{DE} - \mathrm{BC}$$

である。

ここで，

$$\begin{aligned}\mathrm{DE} &= 2\mathrm{DG} \\ &= 2\sqrt{\mathrm{AD}^2 - \mathrm{AG}^2} \\ &= \sqrt{16 - (\mathrm{OF} + \mathrm{OA}\cos\theta)^2} \\ &= \sqrt{16 - (t + \cos\theta)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BC} &= 2\mathrm{BF} \\ &= 2\sqrt{4 - t^2}\end{aligned}$$

であるので，

$$M = 2\left(\sqrt{16 - (t + \cos\theta)^2} - \sqrt{4 - t^2}\right)$$

となる。

(b) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき

(a) と同様にして，A から OF に下ろした垂線を OH とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{DE} &= 2\sqrt{16-(\mathrm{OF}-\mathrm{OA}\cos(\pi-\theta))^2} \\ &= \sqrt{16-(t+\cos\theta)^2}\end{aligned}$$

よって，

$$M = 2\left(\sqrt{16-(t+\cos\theta)^2} - \sqrt{4-t^2}\right)$$

である。

(a) と (b) をまとめて，

$$M = 2\left(\sqrt{16-(t+\cos\theta)^2} - \sqrt{4-t^2}\right)$$

であり，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において，これは $\theta = 0$ のとき最小となり，最小値 L_0 は

$$L_0 = 2\left(\sqrt{16-(t+1)^2} - \sqrt{4-t^2}\right)$$

である。

(2) $L_0 = f(t)$ とおく。

$$f'(t) = 2\left(\frac{-2(t+1)}{2\sqrt{16-(t+1)^2}} - \frac{-2t}{2\sqrt{4-t^2}}\right)$$

である。

$f'(t) > 0$ を考えると，$\dfrac{t}{\sqrt{4-t^2}} > \dfrac{t+1}{\sqrt{16-(t+1)^2}}$ である。

両辺を平方しても同値であり，

$$t^2\left\{16-(t+1)\right\}^2 > (t+1)^2(4-t^2)$$

$$(3t-1)(t+1) > 0$$

となる。

したがって，$0 \leqq t \leqq 2$ の範囲で上記の不等式を満たすのは $\dfrac{1}{3} < t \leqq 2$ である。よって，$f(t)$ は $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ で減少し，$\dfrac{1}{3} < t \leqq 2$ で増加するから，$t = \dfrac{1}{3}$ のとき最小となる。

以上より，最小値は $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}\left(8\sqrt{2} - \sqrt{35}\right)$ である。