$a_2=4,\ a_3=5,\ a_4=3,\ a_5=9,\ a_6=4$ となるから，一般に m を自然数として

$$a_{4m-2}=4,\ a_{4m-1}=5,\ a_{4m}=3,\ a_{4m+1}=9 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

であると推定される。これを数学的帰納法によって証明する。

$m=1$ のとき，① は成り立つ。

$m=k$ (k は自然数) のとき，① が成り立つと仮定すると

$$a_{4k-2}=4,\ a_{4k-1}=5,\ a_{4k}=3,\ a_{4k+1}=9$$

このとき，

$${a_{4k+1}}^2=81=11\times 7+4$$

よって，$a_{4k+2}=4$

$${a_{4k+2}}^2=16=11\times 1+5$$

よって，$a_{4k+3}=5$

$${a_{4k+3}}^2=25=11\times 2+3$$

よって，$a_{4k+4}=3$

$${a_{4k+4}}^2=9$$

よって，$a_{4k+5}=9$

したがって，① は $m=k+1$ のときも成り立つ。

以上から，① はすべての自然数 m に対して成り立つ。

ここで，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$ の第 n 部分和を $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{2^k}$ とおく。

$$\begin{aligned}
S_{4m+1} &= \sum_{k=1}^{4m+1}\frac{a_k}{2^k}\\
&= \frac{a_1}{2}\\
&\quad + \frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}\\
&\quad + \frac{a_6}{2^6}+\frac{a_7}{2^7}+\frac{a_8}{2^8}+\frac{a_9}{2^9}\\
&\quad + \cdots\\
&\quad + \frac{a_{4m-2}}{2^{4m-2}}+\frac{a_{4m-1}}{2^{4m-1}}+\frac{a_{4m}}{2^{4m}}+\frac{a_{4m+1}}{2^{4m+1}}\\
&= 1\\
&\quad + \frac{a_2}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2^{4m-4}}\right)\\
&\quad + \frac{a_3}{2^3}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2^{4m-4}}\right)\\
&\quad + \frac{a_4}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2^{4m-4}}\right)\\
&\quad + \frac{a_5}{2^5}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2^{4m-4}}\right)\\
&= 1+\left(\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2^{4m-4}}\right)\\
&= 1+\left(\frac{4}{4}+\frac{5}{8}+\frac{3}{16}+\frac{9}{32}\right)\times\frac{1-\left(\dfrac{1}{2^4}\right)^m}{1-\dfrac{1}{2^4}}\\
&= \frac{99}{32}\times\frac{16}{15}\left(1-\frac{1}{2^{4m}}\right)\\
&= \frac{33}{10}\left(1-\frac{1}{2^{4m}}\right)
\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} S_{4m+1} = \frac{33}{10}$ である。

$$
\begin{aligned}
S_{4m} &= S_{4m+1} - \frac{a_{4m+1}}{2^{4m+1}} \\
&= S_{4m+1} - \frac{9}{2^{4m+1}}
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} S_{4m} = \frac{33}{10}$ である。

$$
\begin{aligned}
S_{4m-1} &= S_{4m} - \frac{a_{4m}}{2^{4m}} \\
&= S_{4m} - \frac{3}{2^{4m}}
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} S_{4m-1} = \frac{33}{10}$ である。

$$
\begin{aligned}
S_{4m-2} &= S_{4m-1} - \frac{a_{4m-1}}{2^{4m-1}} \\
&= S_{4m-1} - \frac{5}{2^{4m-1}}
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} S_{4m-2} = \frac{33}{10}$ である。

以上より，

$$
\lim_{m\to\infty} S_{4m-2} = \lim_{m\to\infty} S_{4m-1} = \lim_{m\to\infty} S_{4m} = \lim_{m\to\infty} S_{4m+1} = \frac{33}{10}
$$

である。

したがって，すべての自然数 n に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{33}{10}$ が成り立つから，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ は収束して，その値は $\dfrac{33}{10}$ である。