

$O(0, 0)$ を原点とする座標平面において、曲線 $C : y = x^2$ と点 $A(0, a)$ がある。ただし、 a は正の定数とする。

(1) A と C 上の点 P との距離の最小値が $OA = a$ と等しくなるような a の最大値 a_0 を求めよ。

(2) y 軸の部分に中心をもち、 C に接する円の列 $\{O_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) があり、次の条件を満たしている。

(イ) 円 O_n と O_{n+1} は外接している。

(ロ) 円 O_n の半径 r_n は n とともに増加する。

(ハ) $r_1 = 2a_0$ である。

このとき、 r_n を n を用いて表せ。

(3) (2) で求めた円 O_1 と C で囲まれる図形の面積 S を求めよ。